Corrigé et barème – Équations : produit nul et $x^2 = a$

Rappels de 4e (carré, racine carrée d'un nombre positif, carrés parfaits, encadrement et valeur approchée), propriété du produit nul et équations $(ax + b)(cx + d) = 0$, factoriser pour s'y ramener (facteur commun, parenthèse commune, différence de deux carrés), équations $x^2 = a$ selon le signe de a, résolues par le calcul et graphiquement, et problèmes de longueurs et d'aires.

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Exercice 1 – Carré et racine carrée ★★ *(4 pts)*

a) $\sqrt{324} = 18$ (car $18 \times 18 = 324$) ; $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$; $(-12)^2 = 144$; $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$ (1)

b) $169 < 180 < 196$, c'est-à-dire $13^2 < 180 < 14^2$, donc $13 < \sqrt{180} < 14$ (1)

c) La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées : on calcule d'abord sous la racine, $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, et non $6 + 8 = 14$ (1)

d) Le côté c est positif et $c^2 = 47$: $c = \sqrt{47}$ m (valeur exacte) ; $\sqrt{47} \approx 6{,}8557$, soit 6,86 m au centimètre (1)

Méthode — $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a : on vérifie toujours en élevant au carré.

Exercice 2 – Équations produit nul ★★ *(4 pts)*

a) Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $x - 9 = 0$ ou $4x + 2 = 0$, donc $x = 9$ ou $x = -0{,}5$ (1)

b) $x = 0$ ou $7 - 2x = 0$; $-2x = -7$, $x = 3{,}5$. Les solutions sont 0 et 3,5 (1)

c) $(5x + 3)(5x + 3) = 0$: les deux facteurs donnent $5x + 3 = 0$, donc une seule solution, $x = -0{,}6$ (1)

d) Elle a appliqué la propriété du produit nul à un produit égal à 4 : elle n'est vraie qu'avec 0. Pour $x = 11$: $(11 - 7) \times (11 + 3) = 4 \times 14 = 56$, et $56 \neq 4$ (1)

Méthode — La phrase de la propriété, puis une équation du premier degré par facteur : on donne toutes les solutions.

Exercice 3 – Factoriser pour résoudre ★★★ *(4 pts)*

a) $E = (x - 5)[(3x + 2) - (x + 4)] = (x - 5)(3x + 2 - x - 4) = (x - 5)(2x - 2)$, ou encore $2(x - 5)(x - 1)$ (1)

b) $x - 5 = 0$ ou $2x - 2 = 0$: les solutions sont 5 et 1 (1)

c) $F = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$. $F = 0$: $3x = 5$ ou $3x = -5$, donc $x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$ (1)

d) $3x^2 - 12x = 0$, donc $3x(x - 4) = 0$: $x = 0$ ou $x = 4$. En divisant par x, on obtiendrait $3x = 12$, seulement $x = 4$: on perdrait la solution 0 (on ne peut pas diviser par x s'il vaut 0) (1)

Le point clé — « $= 0$ » d'abord, puis factoriser : facteur commun, ou $a^2 - b^2$; le produit nul fait le reste.

Exercice 4 – Équations $x^2 = a$ ★★ *(4 pts)*

a) $1{,}44 > 0$ et $1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44$: $x = 1{,}2$ ou $x = -1{,}2$ (1)

b) $4x^2 = 100$, donc $x^2 = 25$: $x = 5$ ou $x = -5$ (1)

c) $x^2 = 5 - 30 = -25$: un carré n'est jamais négatif, l'équation n'a aucune solution (1)

d) La droite coupe la courbe en deux points d'abscisses environ $-1{,}7$ et $1{,}7$. Valeurs exactes : $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ($\sqrt{3} \approx 1{,}73$) (1)

Repère — Le signe de a décide : deux solutions si $a > 0$, une si $a = 0$, aucune si $a < 0$.

Exercice 5 – Problème — le jardin agrandi ★★★ *(4 pts)*

a) Le nouveau côté mesure $x + 2$ m : $(x+2)^2 = 110{,}25$ (1)

b) $x + 2 = \sqrt{110{,}25} = 10{,}5$ ou $x + 2 = -10{,}5$, donc $x = 8{,}5$ ou $x = -12{,}5$ (1)

c) Une longueur est positive : on écarte $-12{,}5$. Le jardin de départ avait $8{,}5$ m de côté. Vérification : $8{,}5 + 2 = 10{,}5$ et $10{,}5 \times 10{,}5 = 110{,}25$ (1)

d) Aire de départ : $8{,}5 \times 8{,}5 = 72{,}25$ m^2. Bande : $110{,}25 - 72{,}25 = 38$ m^2 (1)

Méthode — Dans un problème de longueur, l'équation donne deux solutions : on garde la positive et on le dit.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).