

Devoir surveillé – Trigonométrie, Pythagore, Thalès et géométrie dans l'espace — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(4 pts)

Réponds à chaque question en justifiant par un calcul exact.

- a) x est un angle aigu tel que $\sin x = 0,6$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.
- b) Un triangle a pour côtés $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{11}$ cm et 4 cm. Est-il rectangle ?
- c) Un cône et une boule ont le même rayon, 3 cm, et le même volume. Quelle est la hauteur du cône ?
- d) Un solide de 54 cm^3 est agrandi ; son volume devient $1\,458 \text{ cm}^3$. Quel est le coefficient d'agrandissement ? Par combien son aire totale est-elle multipliée ?

Exercice 2 – Calculs exacts

(4 pts)

Dans le triangle ABC , $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$ et $AC = 8$ cm. H est le pied de la hauteur issue de A ; il est situé sur $[BC]$. On rappelle : $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ et $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Toutes les réponses sont attendues en valeur exacte.

- a) Calcule HC et AH .
- b) Démontre que $BH = AH$.
- c) Calcule BC , puis l'aire du triangle ABC sous la forme $a + b\sqrt{3}$.
- d) Calcule AB^2 , puis encadre AB entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3 – Recherche — les cônes « entiers »

(4 pts)

On cherche **tous** les cônes de révolution de hauteur 12 cm dont le rayon r et la génératrice g sont des nombres entiers de centimètres ($r > 0$).

- a) Démontre que $g^2 - r^2 = 144$, puis que $(g - r)(g + r) = 144$.
- b) Explique pourquoi $g - r$ et $g + r$ sont forcément tous les deux pairs.
- c) Trouve tous les couples $(r ; g)$ possibles, en justifiant qu'on n'en oublie aucun.
- d) Parmi ces cônes, lequel a le plus grand demi-angle au sommet ? Justifie sans calculatrice.

Exercice 4 – Problème — le silo à grain*(5 pts)*

Un silo est formé d'un cylindre de 6 m de diamètre et de 10 m de hauteur, posé sur une trémie : un cône de même rayon, pointe en bas, dont la génératrice mesure 5 m. Le grain ne s'écoule bien que si la paroi de la trémie fait avec l'horizontale un angle supérieur à 45° . On rappelle : $\tan 45^\circ = 1$. Les volumes sont attendus en valeur exacte (en fonction de π), puis arrondis avec $\pi \approx 3,14$ quand c'est demandé.

- a) Calcule la hauteur de la trémie.
- b) Calcule le volume total du silo en valeur exacte.
- c) Démontre, sans calculatrice, que le grain s'écoule bien.
- d) Une maquette du silo est réalisée à l'échelle $\frac{1}{50}$. Quel est son volume, en litres, au dixième près ?
- e) Le grain a une masse de 750 kg par m^3 . On remplit la trémie et la moitié du cylindre. Quelle masse de grain, au dixième de tonne près, contient le silo ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(3 pts)*

On démontre deux propriétés, puis on les applique. On rappelle : $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

- a) Démontre que, pour tout angle aigu x , $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
- b) ABC est un triangle dont l'angle $\widehat{B}$ est aigu et H le pied de la hauteur issue de A . Démontre que $AH = AB \times \sin \widehat{B}$, puis que l'aire de ABC vaut $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \widehat{B}$.
- c) Calcule l'aire d'un triangle ayant deux côtés de 6 cm et 10 cm qui forment un angle de 30° . Explique pourquoi un triangle ayant deux côtés de 6 cm et 10 cm formant un angle **aigu** a toujours une aire inférieure à 30 cm^2 .

Bon courage !