

# Corrigé et barème – Trigonométrie, Pythagore, Thalès et géométrie dans l'espace — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3°

## Exercice 1 – Automatismes justifiés

(4 pts)

- a)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , donc  $\cos^2 x = 1 - 0,36 = 0,64$  ; comme  $\cos x > 0$  pour un angle aigu,  $\cos x = 0,8$ . Puis  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$ . (1 pt : cosinus 0,5 ; tangente 0,5) (1)
- b) Le plus grand côté est 4 cm (car  $4 = \sqrt{16}$ ).  $4^2 = 16$  et  $\sqrt{5}^2 + \sqrt{11}^2 = 5 + 11 = 16$  : d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle, l'angle droit étant opposé au côté de 4 cm. (1 pt : comparaison des côtés et calculs 0,5 ; conclusion 0,5) (1)
- c) Boule :  $\frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 36\pi \text{ cm}^3$ . Cône :  $\frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times h = 3\pi h$ .  $3\pi h = 36\pi$  donne  $h = 12$  cm. (1 pt : équation 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- d) Le volume est multiplié par  $k^3 = \frac{1\,458}{54} = 27 = 3^3$ , donc  $k = 3$ . L'aire est multipliée par  $k^2 = 9$ . (1 pt :  $k$  0,5 ; aire 0,5) (1)

**Astuce** —  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  et  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  permettent de déduire les trois rapports d'un seul, sans calculatrice ni figure.

## Exercice 2 – Calculs exacts

(4 pts)

- a) Le triangle  $AHC$  est rectangle en  $H$ , d'hypoténuse  $[AC]$ .  $HC = AC \times \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4$  cm et  $AH = AC \times \sin 60^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$  cm. (1 pt :  $HC$  0,5 ;  $AH$  0,5) (1)
- b) Dans  $ABH$  rectangle en  $H$  :  $\widehat{BAH} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \widehat{ABH}$ . Le triangle  $ABH$  a deux angles égaux, il est isocèle en  $H$  :  $BH = AH = 4\sqrt{3}$  cm. (1 pt : angle 0,5 ; conclusion 0,5) (1)
- c)  $H \in [BC]$ , donc  $BC = BH + HC = 4\sqrt{3} + 4$  cm. Aire =  $\frac{BC \times AH}{2} = \frac{(4 + 4\sqrt{3}) \times 4\sqrt{3}}{2} = (4 + 4\sqrt{3}) \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 8 \times 3 = 24 + 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . (1 pt :  $BC$  0,5 ; aire développée 0,5) (1)
- d) Pythagore dans  $ABH$  :  $AB^2 = AH^2 + BH^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 48 + 48 = 96$ , donc  $AB = \sqrt{96}$  cm. Comme  $81 < 96 < 100$ , on a  $9 < AB < 10$ . (1 pt :  $AB^2$  0,5 ; encadrement 0,5) (1)

**Piège** —  $(4\sqrt{3})^2$  vaut  $16 \times 3 = 48$  et non  $4 \times 3$  : le carré porte sur les deux facteurs du produit.

**Exercice 3 – Recherche — les cônes « entiers »**

(4 pts)

- a) La hauteur, le rayon et la génératrice forment un triangle rectangle d'hypoténuse la génératrice :  $g^2 = 12^2 + r^2$ , donc  $g^2 - r^2 = 144$ . Avec l'identité  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) : (g - r)(g + r) = 144$ . (1 pt : Pythagore 0,5 ; factorisation 0,5) (1)
- b)  $(g + r) - (g - r) = 2r$  est pair, donc  $g - r$  et  $g + r$  ont la même parité. S'ils étaient tous deux impairs, leur produit serait impair, or 144 est pair : ils sont donc tous deux pairs. (1 pt : même parité 0,5 ; exclusion du cas impair 0,5) (1)
- c) On pose  $d = g - r$  et  $e = g + r : d \times e = 144$ ,  $d$  et  $e$  pairs, et  $0 < d < e$  car  $r > 0$  (on a  $g > r$  puisque  $g^2 = r^2 + 144$ ). Alors  $d^2 < d \times e = 144$ , donc  $d < 12$  : les seules valeurs paires possibles de  $d$  divisant 144 sont 2, 4, 6, 8, avec  $e = 72, 36, 24, 18$ , tous pairs. Comme  $g = \frac{d+e}{2}$  et  $r = \frac{e-d}{2}$ , on obtient exactement quatre cônes : (35 ; 37), (16 ; 20), (9 ; 15) et (5 ; 13). Vérification :  $35^2 + 144 = 1\,369 = 37^2$ . (1,5 pt : encadrement  $d < 12$  0,5 ; liste des couples  $(d ; e)$  0,5 ; quatre cônes 0,5) (1)
- d) Le demi-angle au sommet  $\alpha$  vérifie  $\tan \alpha = \frac{r}{12}$ . Plus  $r$  est grand, plus la tangente est grande et plus l'angle est grand (le côté opposé s'allonge pour un même côté adjacent) : c'est le cône de rayon 35 cm. (0,5 pt) (1)

**Méthode** — pour être sûr de n'oublier aucune solution, on transforme le problème en une liste finie : ici, les décompositions de 144 en produit de deux facteurs pairs, que l'on parcourt dans l'ordre.

**Exercice 4 – Problème — le silo à grain**

(5 pts)

- a) Rayon 3 m. Rayon, hauteur et génératrice forment un triangle rectangle :  $h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$ , donc  $h = 4$  m. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- b) Cylindre :  $\pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi \text{ m}^3$ . Trémie :  $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \text{ m}^3$ . Total :  $102\pi \text{ m}^3$ . (1 pt : deux volumes 0,5 ; total 0,5) (1)
- c) Dans le triangle rectangle de la trémie, l'angle  $\alpha$  entre la paroi et l'horizontale a pour côté opposé la hauteur (4 m) et pour côté adjacent le rayon (3 m) :  $\tan \alpha = \frac{4}{3} > 1 = \tan 45^\circ$ . Pour un angle aigu, la tangente augmente avec l'angle (à côté adjacent fixé, un angle plus grand donne un côté opposé plus long), donc  $\alpha > 45^\circ$  : le grain s'écoule bien. (1 pt : rapport 0,5 ; comparaison justifiée 0,5) (1)
- d) Les volumes sont divisés par  $50^3 = 125\,000$  :  $\frac{102\pi}{125\,000} \text{ m}^3 = \frac{102\pi \times 1\,000}{125\,000} \text{ L} = 0,816\pi \text{ L}$ . Avec  $\pi \approx 3,14$  :  $0,816 \times 3,14 = 2,562\,24$ , soit environ 2,6 L. (1 pt : coefficient  $k^3$  0,5 ; conversion et valeur 0,5) (1)
- e) Volume de grain :  $12\pi + \frac{90\pi}{2} = 12\pi + 45\pi = 57\pi \text{ m}^3$ . Masse :  $57\pi \times 0,75 = 42,75\pi \text{ t}$ , et  $42,75 \times 3,14 = 134,235$ , soit environ 134,2 t. (1 pt : volume 0,5 ; masse 0,5) (1)

**Erreur fréquente** —  $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$  : oublier cette conversion, ou l'appliquer avant de diviser par  $k^3$  sans changer d'unité, fausse le résultat d'un facteur mille.

**Exercice 5 – Pour aller plus loin****(3 pts)**

- a) On place  $x$  dans un triangle rectangle d'hypoténuse  $c$ , de côté adjacent  $a$  et de côté opposé  $b$  :  
 $\cos x = \frac{a}{c}$  et  $\sin x = \frac{b}{c}$ . Alors  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$ , car  $a^2 + b^2 = c^2$  d'après Pythagore. (1 pt : rapports 0,5 ; utilisation de Pythagore 0,5) (1)
- b) Le triangle  $ABH$  est rectangle en  $H$ , d'hypoténuse  $[AB]$ , et  $[AH]$  est le côté opposé à  $\widehat{B}$  :  $\sin \widehat{B} = \frac{AH}{AB}$ , d'où  $AH = AB \times \sin \widehat{B}$ . L'aire de  $ABC$  vaut  $\frac{BC \times AH}{2} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \widehat{B}$ . (1 pt : hauteur 0,5 ; aire 0,5) (1)
- c) Aire =  $\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin 30^\circ = 30 \times \frac{1}{2} = 15 \text{ cm}^2$ . Pour un angle aigu  $x$ ,  $\sin x < 1$  (le côté opposé est plus court que l'hypoténuse), donc l'aire  $\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin x = 30 \sin x$  est strictement inférieure à  $30 \text{ cm}^2$ . (1 pt : aire 0,5 ; argument  $\sin x < 1$  0,5) (1)

**Méthode** — pour démontrer une propriété d'un angle quelconque, on le place dans un triangle rectangle bien choisi, on nomme ses côtés par des lettres et on raisonne sur les lettres, jamais sur un exemple.

---

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*