

Corrigé et barème – Trigonométrie, Pythagore, Thalès et géométrie dans l'espace — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3°

Exercice 1 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) **Vrai.** Le plus grand côté mesure 5,3 cm : $5,3^2 = 28,09$ et $2,8^2 + 4,5^2 = 7,84 + 20,25 = 28,09$. L'égalité est vérifiée, donc le triangle est rectangle (réciproque de Pythagore). (1 pt : calculs 0,5 ; conclusion 0,5) (1)
- b) **Faux.** Les longueurs sont multipliées par 50, donc les volumes par $50^3 = 125\,000$: le réservoir contient $2 \times 125\,000 = 250\,000$ L, soit 250 m³. (1 pt : coefficient k^3 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) **Vrai.** Dans un triangle rectangle, $\sin x = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$ et $\tan x = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$. Même numérateur, et l'adjacent est plus court que l'hypoténuse : diviser par un nombre plus petit donne un résultat plus grand, donc $\sin x < \tan x$. (1 pt : écriture des rapports 0,5 ; argument 0,5) (1)
- d) **Faux.** Deux villes sur le même méridien ont la même **longitude** ; leur latitude peut être différente (l'une au nord, l'autre au sud, par exemple). Ce sont les villes d'un même parallèle qui ont la même latitude. (1 pt : réponse 0,5 ; justification 0,5) (1)

Piège — à l'échelle $\frac{1}{k}$, les longueurs sont divisées par k , les aires par k^2 et les volumes par k^3 : multiplier un volume par k seulement est l'erreur la plus répandue.

Exercice 2 – Problème — le cornet de glace

(4 pts)

- a) Le triangle SOA est rectangle en O : $SA^2 = SO^2 + OA^2 = 36 + 6,25 = 42,25$, donc $SA = \sqrt{42,25} = 6,5$ cm. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- b) $\tan \widehat{OSA} = \frac{OA}{SO} = \frac{2,5}{6}$, donc $\widehat{OSA} \approx 22,62^\circ$. L'angle au sommet vaut le double : $2 \times 22,62^\circ \approx 45,2^\circ$, soit 45° . On arrondit à la fin seulement. (1 pt : demi-angle 0,5 ; angle au sommet 0,5) (1)
- c) $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 2,5^2 \times 6 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6,25 \times 6 = 12,5\pi \approx 39,3$ cm³. (1 pt : formule 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- d) Rayon de la boule : 2,5 cm. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 2,5^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 15,625 \approx 65,4$ cm³. Comme $65,4 > 39,3$, la glace fondue ne tient pas dans le cornet : il déborde. (1 pt : volume de la boule 0,5 ; conclusion 0,5) (1)

Erreur fréquente — dans la formule de la boule, c'est le rayon qu'on met au cube, pas le diamètre : avec 5^3 au lieu de $2,5^3$, on trouve un volume huit fois trop grand.

Exercice 3 – Enquête — la largeur de la rivière

(4 pts)

- a) $(BD) \perp (AC)$ et $(CE) \perp (AC)$ (le triangle ACE est rectangle en C). Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : $(BD) \parallel (CE)$. (1 pt : deux perpendicularités 0,5 ; propriété citée 0,5) (1)
- b) $AC = AB + BC = 8 + 12 = 20$ m. Les points A, B, C et A, D, E sont alignés et $(BD) \parallel (CE)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$, soit $\frac{8}{20} = \frac{6}{CE}$ et $CE = \frac{6 \times 20}{8} = 15$ m. (1 pt : AC et égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) ABD est rectangle en B : $AD^2 = 64 + 36 = 100$, $AD = 10$ m. Par Thalès : $AE = AD \times \frac{AC}{AB} = 10 \times \frac{20}{8} = 25$ m. Par Pythagore dans ACE : $AE^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625$, $AE = 25$ m. (1 pt : AD 0,5 ; AE deux méthodes 0,5) (1)
- d) Dans ACE rectangle en C : $\tan \widehat{CAE} = \frac{CE}{AC} = \frac{15}{20} = 0,75$, donc $\widehat{CAE} \approx 36,9^\circ$, soit 37° . (1 pt : rapport 0,5 ; angle 0,5) (1)

Méthode — « deux perpendiculaires à une même droite » est la façon la plus courante d'obtenir le parallélisme nécessaire à Thalès : on la cherche dès qu'une figure contient deux angles droits.

Exercice 4 – Section d'un cône

(5 pts)

- a) La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un disque, de centre O' . Le petit cône est une réduction du grand de rapport $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$: rayon = $\frac{2}{5} \times 8 = 3,2$ cm. (1 pt : nature 0,5 ; rayon 0,5) (1)
- b) SOA est rectangle en O : $SA^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$, donc $SA = 17$ cm. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) $\tan \widehat{OSA} = \frac{OA}{SO} = \frac{8}{15}$, donc $\widehat{OSA} \approx 28,1^\circ$, soit 28° . (1 pt : rapport 0,5 ; angle 0,5) (1)
- d) Grand cône : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 15 = 320\pi \approx 1\,005,3$ cm³. Petit cône : $V' = k^3 \times V = \frac{8}{125} \times 320\pi = 20,48\pi \approx 64,3$ cm³ (vérification : $\frac{1}{3} \times \pi \times 3,2^2 \times 6 = 20,48\pi$). (1 pt : grand cône 0,5 ; petit cône 0,5) (1)
- e) $V_{\text{tronc}} = 320\pi - 20,48\pi = 299,52\pi \approx 941$ cm³. (1 pt : différence 0,5 ; résultat 0,5) (1)

Astuce — on soustrait les valeurs exactes ($320\pi - 20,48\pi$) avant d'arrondir : soustraire deux valeurs déjà arrondies peut décaler le résultat final d'une unité.

Exercice 5 – Se repérer sur la Terre

(3 pts)

- a) Ils ont la même longitude (25° E) : ils sont sur le même méridien. Leurs latitudes sont opposées, l'un dans l'hémisphère nord, l'autre dans l'hémisphère sud : ils sont symétriques par rapport au plan de l'équateur. (0,5 pt) (1)
- b) Dans OHM rectangle en H , $[OM]$ est l'hypoténuse ($OM = 6\,370$ km) et $[HM]$ le côté adjacent à $\widehat{OMH}$: $HM = 6\,370 \times \cos 60^\circ = 6\,370 \times 0,5 = 3\,185$ km. (1,5 pt : triangle et côtés identifiés 0,5 ; formule 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) Longueur du parallèle : $2 \times \pi \times 3\,185 = 6\,370\pi \approx 20\,012$ km. Équateur : $2 \times \pi \times 6\,370 = 12\,740\pi \approx 40\,024$ km. Le parallèle 60° N mesure exactement la moitié de l'équateur, car $\cos 60^\circ = 0,5$. (1 pt : longueur 0,5 ; comparaison 0,5) (1)

Erreur fréquente — le rayon d'un parallèle n'est pas le rayon de la Terre : il diminue quand on s'éloigne de l'équateur, et c'est la trigonométrie qui permet de le calculer.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).