

# Corrigé et barème – Trigonométrie, Pythagore, Thalès et géométrie dans l'espace — niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3<sup>e</sup>

## Exercice 1 – Échauffement

(4 pts)

- a) Le triangle  $KLM$  est rectangle en  $L$ , donc d'après le théorème de Pythagore :  $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 400 + 441 = 841$ , d'où  $KM = \sqrt{841} = 29$  cm. (1 pt : égalité de Pythagore 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- b) Le côté adjacent à  $\widehat{K}$  est  $[KL]$ , l'hypoténuse est  $[KM]$  :  $\cos \widehat{K} = \frac{KL}{KM} = \frac{20}{29}$ . À la calculatrice,  $\widehat{K} = \arccos\left(\frac{20}{29}\right) \approx 46,4^\circ$ , soit  $46^\circ$  au degré près. (1 pt : fraction 0,5 ; angle 0,5) (1)
- c) La hauteur, le rayon et la génératrice forment un triangle rectangle dont la génératrice est l'hypoténuse :  $r^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100$ , donc  $r = 10$  cm. (1 pt : triangle rectangle identifié 0,5 ; calcul 0,5) (1)
- d)  $V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 100 \times 24 = 800\pi \approx 2\,513$  cm<sup>3</sup>. (1 pt : formule 0,5 ; résultat 0,5) (1)

**Méthode** — dans un cône, la hauteur, le rayon et la génératrice forment toujours un triangle rectangle : c'est le pont entre Pythagore et la géométrie dans l'espace.

## Exercice 2 – SOH-CAH-TOA

(4 pts)

- a) L'hypoténuse est  $[RT]$  (en face de l'angle droit  $\widehat{S}$ ) ; le côté opposé à  $\widehat{R}$  est  $[ST]$  ; le côté adjacent à  $\widehat{R}$  est  $[RS]$ . (1 pt : 3 réponses justes 1 ; 2 réponses justes 0,5) (1)
- b) On connaît l'hypoténuse et on cherche le côté opposé : on utilise le sinus.  $\sin \widehat{R} = \frac{ST}{RT}$ , donc  $ST = 9 \times \sin 38^\circ \approx 5,54$ , soit  $ST \approx 5,5$  cm. (1 pt : choix du sinus 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) On cherche le côté adjacent : on utilise le cosinus.  $\cos \widehat{R} = \frac{RS}{RT}$ , donc  $RS = 9 \times \cos 38^\circ \approx 7,09$ , soit  $RS \approx 7,1$  cm. (1 pt : choix du cosinus 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- d) La somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$  :  $\widehat{T} = 180^\circ - 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$ . Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. (1 pt : justification 0,5 ; résultat 0,5) (1)

**Piège** — « opposé » et « adjacent » dépendent de l'angle choisi : le côté opposé à  $\widehat{R}$  est le côté adjacent à  $\widehat{T}$ . On repère toujours l'angle avant de nommer les côtés.

**Exercice 3 – Thalès ou Pythagore ?**

(4 pts)

- a)  $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$  et  $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{7,5} = 0,4$ . Les rapports sont égaux et les points  $A, M, B$  et  $A, N, C$  sont alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès,  $(MN) \parallel (BC)$ . (1,5 pt : deux rapports 0,5 ; égalité 0,5 ; conclusion avec l'ordre des points 0,5) (1)
- b) Les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ , soit  $\frac{4}{10} = \frac{5}{BC}$  et  $BC = \frac{5 \times 10}{4} = 12,5$  cm. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c) Le plus grand côté est  $[MN]$  :  $MN^2 = 25$  et  $AM^2 + AN^2 = 16 + 9 = 25$ . L'égalité  $MN^2 = AM^2 + AN^2$  est vérifiée, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,  $AMN$  est rectangle en  $A$ . (1 pt : calculs séparés 0,5 ; conclusion 0,5) (1)
- d) Les angles  $\widehat{MAN}$  et  $\widehat{BAC}$  sont le même angle (mêmes demi-droites), donc  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  :  $ABC$  est rectangle en  $A$ . Vérification :  $AB^2 + AC^2 = 100 + 56,25 = 156,25 = 12,5^2$ . (0,5 pt) (1)

**Erreur fréquente** — pour la réciproque de Pythagore, on calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des deux autres carrés ; écrire l'égalité avant de l'avoir vérifiée, c'est supposer ce qu'on veut démontrer.

**Exercice 4 – Solides et volumes**

(4 pts)

- a) Aire de la base :  $\frac{7 \times 24}{2} = 84$  cm<sup>2</sup>. Volume du prisme :  $84 \times 10 = 840$  cm<sup>3</sup>. (1 pt : aire 0,5 ; volume 0,5) (1)
- b) La base est rectangle, le côté cherché est l'hypoténuse :  $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ , donc la longueur vaut  $\sqrt{625} = 25$  cm. (1 pt : Pythagore 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- c)  $V = \pi \times 4^2 \times 15 = 240\pi \approx 754$  cm<sup>3</sup>. Comme  $754 < 840$ , le prisme a le plus grand volume. (1 pt : volume 0,5 ; comparaison 0,5) (1)
- d) Le diamètre de la boule est 8 cm, égal au diamètre du cylindre, et  $8 \leq 15$  : la boule rentre (juste) dans le cylindre.  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 = \frac{256\pi}{3} \approx 268$  cm<sup>3</sup>. (1 pt : justification 0,5 ; volume 0,5) (1)

**Astuce** — prisme et cylindre se calculent de la même façon, aire de la base multipliée par la hauteur ; seul le cône et la pyramide demandent de diviser par 3.

**Exercice 5 – Problème — l'échelle**

(4 pts)

- a) Le mur, le sol et l'échelle forment un triangle rectangle au pied du mur, d'hypoténuse l'échelle. Pythagore :  $h^2 = 5^2 - 1,6^2 = 25 - 2,56 = 22,44$ , donc  $h = \sqrt{22,44} \approx 4,74$  m. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)
- b) La distance au mur est le côté adjacent à l'angle  $\alpha$  au sol :  $\cos \alpha = \frac{1,6}{5} = 0,32$ , donc  $\alpha \approx 71,3^\circ$ , soit  $71^\circ$ . (1 pt : choix du cosinus 0,5 ; angle 0,5) (1)
- c)  $65^\circ < 71^\circ < 75^\circ$  : l'échelle est placée sans danger. (1 pt : comparaison 0,5 ; conclusion rédigée 0,5) (1)
- d)  $\cos 70^\circ = \frac{d}{5}$ , donc  $d = 5 \times \cos 70^\circ \approx 1,710$ , soit  $d \approx 1,71$  m. (1 pt : égalité 0,5 ; résultat 0,5) (1)

**Méthode** — avant tout calcul, on dessine le triangle rectangle et on repère ce que l'on connaît : deux côtés, c'est Pythagore ; un angle en jeu, c'est la trigonométrie.