

Devoir surveillé – Thalès, triangles semblables et homothétie — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Raisonner avant de calculer

(4 pts)

Justifie chaque réponse par une propriété ; les calculs, s'il y en a, doivent rester courts.

- a) Par une homothétie de rapport k , l'aire d'une figure est multipliée par $\frac{9}{16}$. Donne toutes les valeurs possibles de k .
- b) Le triangle ABC vérifie $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB} = 3\widehat{ABC}$. Le triangle DEF est rectangle en F et $\widehat{DEF} = 30^\circ$. Ces deux triangles sont-ils semblables ?
- c) Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$ et $AM = \frac{2}{7}AB$. Quelle fraction de l'aire du triangle ABC le trapèze $MNCB$ occupe-t-il ?
- d) Un aquarium en forme de pavé droit contient 30 L quand il est plein. Un second aquarium a la même forme, mais chacune de ses dimensions est 50 % plus grande. Quelle est sa contenance ?

Exercice 2 – Calculs en cascade — le trapèze

(4 pts)

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$: $(AB) \parallel (DC)$, $AB = 15$ cm et $DC = 6$ cm. Ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O ; $AC = 14$ cm et $BD = 17,5$ cm. Les résultats sont attendus sous forme exacte (fractions irréductibles si nécessaire).

- a) Démontre que les triangles OAB et OCD sont semblables et donne le coefficient d'agrandissement de OCD vers OAB .
- b) Calcule OA , OC , OB et OD .
- c) La parallèle à (AB) passant par O coupe $[AD]$ en E et $[BC]$ en F . Calcule OE et OF , puis EF . Que remarques-tu ?
- d) Quelle homothétie transforme le triangle OCD en triangle OAB ? Déduis-en, sans calculer d'aire, combien de fois l'aire de OAB contient celle de OCD .

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

Le triangle ABC a pour côtés $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $CA = 8$ cm.

- a) Détermine tous les triangles semblables à ABC qui ont un côté de 12 cm (donne leurs trois côtés). Justifie que tu n'en oublies aucun.
- b) Parmi tous les triangles semblables à ABC , lesquels ont à la fois un côté de 12 cm et un côté de 18 cm ?
- c) On applique au triangle ABC une homothétie de centre A et de rapport k . Donne toutes les valeurs de k pour lesquelles le triangle image a un côté de 12 cm.
- d) Parmi ces valeurs de k , lesquelles donnent un triangle image dont l'aire est inférieure à 5 fois celle de ABC ?

Exercice 4 – Problème — le vitrail**(5 pts)**

Un vitrail a la forme d'un triangle ABC isocèle en A , de base $BC = 12$ dm et de hauteur $AH = 8$ dm, où H est le milieu de $[BC]$. Un artisan veut y insérer une vitre rectangulaire $MNPQ$: $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, le côté $[QP]$ est posé sur $[BC]$, et la longueur MN doit être le double de la largeur MQ . Les résultats sont attendus sous forme exacte ; rédige ta démarche.

- a) Détermine les dimensions exactes de la vitre.
- b) Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par une homothétie : précise-la, puis calcule l'aire exacte du triangle AMN .
- c) Quelle fraction de l'aire du vitrail la vitre occupe-t-elle ? Est-ce plus ou moins que la moitié ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin — triangles emboîtés**(3 pts)**

ABC est un triangle quelconque ; I , J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

- a) Démontre que $(KJ) \parallel (BC)$ et que $KJ = \frac{1}{2} BC$.
- b) Démontre que le triangle IJK est semblable au triangle ABC ; précise les sommets homologues et le coefficient.
- c) Démontre que les quatre triangles AKJ , KBI , JIC et IJK ont la même aire.
- d) On recommence dans le triangle IJK (on trace le triangle de ses milieux), puis dans le triangle obtenu, et ainsi de suite. Quelle fraction de l'aire de ABC le triangle obtenu après n étapes occupe-t-il ? À partir de quelle étape cette fraction devient-elle inférieure à un millième ?

Bon courage !