

Corrigé et barème – Thalès, triangles semblables et homothétie — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3°

Exercice 1 – Raisonner avant de calculer

(4 pts)

- a) Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 : $k^2 = \frac{9}{16}$ (0,5 pt). Cette équation a deux solutions, $k = \frac{3}{4}$ et $k = -\frac{3}{4}$, et les deux conviennent, car $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ aussi (0,5 pt). (1)
- b) Posons $x = \widehat{ABC}$: $x + 2x + 3x = 180^\circ$, donc $6x = 180^\circ$ et $x = 30^\circ$; les angles de ABC sont $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$ et $\widehat{C} = 90^\circ$ (0,5 pt). Ceux de DEF : $\widehat{F} = 90^\circ$, $\widehat{E} = 30^\circ$ et $\widehat{D} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Les angles sont égaux deux à deux : les triangles sont semblables, avec A associé à D , B à E et C à F (0,5 pt). (1)
- c) D'après le théorème de Thalès, $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{7}$: AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{7}$, donc son aire vaut $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$ de celle de ABC (0,5 pt). Le trapèze occupe $1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49}$ de l'aire de ABC (0,5 pt). (1)
- d) Le second aquarium est un agrandissement du premier de coefficient $1,5 = \frac{3}{2}$; les volumes sont multipliés par $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ (0,5 pt). Contenance : $30 \times \frac{27}{8} = \frac{810}{8} = 101,25$ L (0,5 pt). (1)

Astuce — sans calculatrice, garde les coefficients sous forme de fraction ($\frac{3}{2}$ plutôt que 1,5) : les carrés et les cubes deviennent immédiats, par exemple $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$.

Exercice 2 – Calculs en cascade — le trapèze

(4 pts)

- a) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet ; les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ sont alternes-internes, formés par les parallèles (AB) et (DC) et la sécante (AC) : ils sont égaux deux à deux (0,5 pt). Les triangles sont donc semblables, avec O associé à O , A à C et B à D ; les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont homologues : $k = \frac{AB}{CD} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ (0,5 pt). (1)
- b) $[OA]$ et $[OC]$ sont homologues, donc $OA = \frac{5}{2} OC$. Comme $O \in [AC]$: $OA + OC = 14$, soit $\frac{7}{2} OC = 14$, d'où $OC = 4$ cm et $OA = 10$ cm (0,5 pt). De même $OB = \frac{5}{2} OD$ et $\frac{7}{2} OD = 17,5$, d'où $OD = 5$ cm et $OB = 12,5$ cm (0,5 pt). (1)
- c) La droite (EF) est parallèle à (AB) , donc à (DC) . Dans le triangle ADC : $E \in [AD]$, $O \in [AC]$ et $(EO) \parallel (DC)$; d'après Thalès, $\frac{OE}{DC} = \frac{AO}{AC} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$, donc $OE = \frac{5}{7} \times 6 = \frac{30}{7}$ cm (0,5 pt). Dans le triangle BDC : $O \in [BD]$, $F \in [BC]$ et $(OF) \parallel (DC)$; $\frac{OF}{DC} = \frac{BO}{BD} = \frac{12,5}{17,5} = \frac{5}{7}$, donc $OF = \frac{30}{7}$ cm (0,5 pt). Ainsi $EF = \frac{60}{7}$ cm et $OE = OF$: O est le milieu de $[EF]$ (0,5 pt). (1)
- d) C'est l'homothétie de centre O ; A est l'image de C et O est situé entre C et A , donc le rapport est $-\frac{5}{2}$. Les aires sont multipliées par $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$: l'aire de OAB vaut 6,25 fois celle de OCD (0,5 pt). (1)

Méthode — dans une figure riche, isole à chaque étape un seul triangle avec sa parallèle ; les fractions exactes se transmettent d'une étape à l'autre sans aucune erreur d'arrondi.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) Un triangle semblable à ABC a ses côtés proportionnels à 4, 6 et 8 : ils valent $4k$, $6k$ et $8k$ avec $k > 0$ (0,5 pt). Le côté de 12 cm est l'homologue de l'un des trois côtés de ABC , d'où trois cas : $4k = 12$ donne $k = 3$ et les côtés 12, 18, 24 cm ; $6k = 12$ donne $k = 2$ et les côtés 8, 12, 16 cm ; $8k = 12$ donne $k = 1,5$ et les côtés 6, 9, 12 cm (0,5 pt). Tous les cas possibles ont été examinés : il y a exactement trois triangles solutions (0,5 pt). (1)
- b) Un tel triangle a un côté de 12 cm, c'est donc l'un des trois précédents ; seul le triangle de côtés 12, 18, 24 cm possède aussi un côté de 18 cm : c'est l'unique solution (0,5 pt). (1)
- c) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par la distance à zéro de k , et l'image est semblable à ABC . D'après la question 1, cette distance à zéro vaut 3, 2 ou 1,5 (0,5 pt). Il y a donc six valeurs : $k = 1,5$, $k = 2$, $k = 3$, $k = -1,5$, $k = -2$ et $k = -3$ (0,5 pt). (1)
- d) L'aire est multipliée par k^2 : $1,5^2 = 2,25$ et $2^2 = 4$ sont inférieurs à 5, mais $3^2 = 9$ ne l'est pas (0,5 pt). Conviennent : $k = -2$, $k = -1,5$, $k = 1,5$ et $k = 2$ (0,5 pt). (1)

Méthode — pour ne rien oublier, organise la recherche par cas (quel côté est l'homologue du côté imposé ?) puis examine chaque cas ; pour une homothétie, pense aussi aux rapports négatifs.

Exercice 4 – Problème — le vitrail

(5 pts)

- a) Notons $x = MQ$ (en dm), donc $MN = 2x$. $MNPQ$ est un rectangle, donc $(MN) \parallel (QP)$, c'est-à-dire $(MN) \parallel (BC)$ (0,5 pt). La droite (MN) coupe $[AH]$ en I ; $MQHI$ est un rectangle, donc $IH = MQ = x$ et $AI = 8 - x$. Dans le triangle ABH , $(MI) \parallel (BH)$, donc d'après Thalès $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{8-x}{8}$; dans le triangle ABC , $(MN) \parallel (BC)$, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{2x}{12}$ (1 pt). On obtient $\frac{8-x}{8} = \frac{2x}{12}$, soit $16x = 12(8-x) = 96 - 12x$, puis $28x = 96$ et $x = \frac{96}{28} = \frac{24}{7}$ (0,5 pt). La vitre mesure $\frac{24}{7}$ dm de large sur $\frac{48}{7}$ dm de long ; vérification : $\frac{MN}{BC} = \frac{48}{84} = \frac{4}{7}$ et $\frac{AI}{AH} = \frac{32}{7} \div 8 = \frac{4}{7}$ (0,5 pt). (1,66667)
- b) Centre A et rapport $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{4}{7}$, positif car M est sur $[AB]$ (0,5 pt). Aire de ABC : $\frac{12 \times 8}{2} = 48 \text{ dm}^2$; aire de AMN : $48 \times \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{48 \times 16}{49} = \frac{768}{49} \text{ dm}^2$ (0,5 pt). (1,66667)
- c) Aire de la vitre : $\frac{24}{7} \times \frac{48}{7} = \frac{1152}{49} \text{ dm}^2$ (0,5 pt). Fraction du vitrail : $\frac{1152}{49} \div 48 = \frac{1152}{49 \times 48} = \frac{24}{49}$, car $1152 = 24 \times 48$ (0,5 pt). Comme $2 \times 24 = 48 < 49$, on a $\frac{24}{49} < \frac{1}{2}$: la vitre occupe un peu moins de la moitié du vitrail (0,5 pt). (1,66667)

Piège — la hauteur du petit triangle AMN se lit sur l'axe (AH) : elle vaut $8 - x$ et non x ; confondre les deux fausse toute l'équation.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — triangles emboîtés

(3 pts)

- a) $\frac{AK}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ et les points A, K, B et A, J, C sont alignés dans le même ordre : d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(KJ) \parallel (BC)$; puis, d'après le théorème de Thalès, $\frac{KJ}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$ (0,5 pt). (0,75)
- b) Le même raisonnement, mené depuis le sommet C puis depuis le sommet B , donne $JI = \frac{1}{2} AB$ et $IK = \frac{1}{2} CA$ (0,5 pt). Les côtés de IJK sont proportionnels à ceux de ABC , avec le coefficient $\frac{1}{2}$: les triangles sont semblables. Le côté $[KJ]$ correspond à $[BC]$, $[JI]$ à $[AB]$ et $[IK]$ à $[CA]$; les sommets associés sont donc I et A , J et B , K et C (0,5 pt). (0,75)
- c) AKJ est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$; de même KBI (centre B) et JIC (centre C). Leurs aires valent donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ de l'aire de ABC (0,5 pt). IJK est semblable à ABC avec le coefficient $\frac{1}{2}$: son aire vaut aussi $\frac{1}{4}$ de celle de ABC . Les quatre aires sont égales ; c'est cohérent, car ces quatre triangles recouvrent ABC sans se chevaucher et $4 \times \frac{1}{4} = 1$ (0,5 pt). (0,75)
- d) Chaque étape multiplie l'aire par $\frac{1}{4}$: après n étapes, la fraction vaut $\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n} = 4^{-n}$. Or $4^4 = 256 < 1000$ et $4^5 = 1024 > 1000$: la fraction passe sous le millième à partir de la cinquième étape (0,5 pt). (0,75)

Erreur fréquente — croire que le triangle des milieux représente la moitié de ABC : ses côtés sont deux fois plus courts, donc son aire est quatre fois plus petite.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).