

Corrigé et barème – Thalès, triangles semblables et homothétie — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3°

Exercice 1 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux (0,5 pt). Contre-exemple : si 40° est l'angle au sommet principal, les deux autres angles mesurent $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$; si 40° est un angle à la base, les angles sont 40° , 40° et $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Les angles ne sont pas égaux deux à deux : ces deux triangles isocèles ne sont pas semblables (0,5 pt). (1)
- b) Vrai (0,5 pt). Le cube agrandi a la même forme ; son volume est multiplié par $1,2^3 = 1,2 \times 1,2 \times 1,2 = 1,728$, soit une augmentation de 72,8 %, qui dépasse 70 % (0,5 pt). (1)
- c) Faux (0,5 pt). Contre-exemple : M milieu de $[AB]$, et N le symétrique par rapport à A du milieu N_1 de $[AC]$; on a bien $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$. D'après la réciproque de Thalès, $(MN_1) \parallel (BC)$; la parallèle à (BC) passant par M est unique et ne coupe (AC) qu'en N_1 . Comme $N \neq N_1$, (MN) n'est pas parallèle à (BC) : il manque la condition « points alignés dans le même ordre » (0,5 pt). (1)
- d) Faux (0,5 pt). La grande pizza est un agrandissement de la petite de coefficient $\frac{30}{20} = 1,5$; la surface garnie est multipliée par $1,5^2 = 2,25$ (en effet $\pi \times 15^2 = 225\pi$ et $\pi \times 10^2 = 100\pi$) : elle porte 2,25 fois plus de garniture, donc plus du double (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — appliquer le coefficient tel quel à une aire ou à un volume : si les longueurs sont multipliées par k , les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3 , tandis que les angles restent inchangés.

Exercice 2 – Un papillon rectangle

(4 pts)

- a) $CA^2 = 4,5^2 = 20,25$ et $AB^2 + CB^2 = 2,7^2 + 3,6^2 = 7,29 + 12,96 = 20,25$ (0,5 pt). Comme $CA^2 = AB^2 + CB^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B (0,5 pt). (1)
- b) Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont opposés par le sommet, donc égaux (0,5 pt). Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DEC}$ sont alternes-internes, formés par les parallèles (AB) et (DE) et la sécante (AE) , donc égaux (0,5 pt). Les triangles ont deux angles égaux deux à deux : ils sont semblables, avec A associé à E , B à D et C à C (0,5 pt). (1)
- c) $[CA]$ et $[CE]$ sont homologues : $k = \frac{CE}{CA} = \frac{6}{4,5} = \frac{60}{45} = \frac{4}{3}$. Donc $DE = \frac{4}{3} \times AB = \frac{4}{3} \times 2,7 = 3,6$ cm et $CD = \frac{4}{3} \times CB = \frac{4}{3} \times 3,6 = 4,8$ cm (0,5 pt). E et D , images de A et B , sont de l'autre côté de C : c'est l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{4}{3}$ (0,5 pt). (1)
- d) L'angle en D est l'homologue de l'angle droit en B : EDC est rectangle en D et son aire vaut $\frac{DE \times CD}{2} = \frac{3,6 \times 4,8}{2} = 8,64$ cm². Autre façon : aire de $ABC = \frac{2,7 \times 3,6}{2} = 4,86$ cm², multipliée par $k^2 = \frac{16}{9}$: $4,86 \times \frac{16}{9} = 0,54 \times 16 = 8,64$ cm² (0,5 pt). (1)

Méthode — pour repérer les côtés homologues, on associe d'abord les sommets grâce aux angles égaux ; deux côtés sont homologues quand ils joignent des sommets associés.

Exercice 3 – Enquête — la charpente

(4 pts)

- a) $\frac{AM}{AB} = \frac{1,6}{4} = 0,4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$ (0,5 pt). Les rapports sont égaux, et les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre (0,5 pt). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$ (0,5 pt). (1)
- b) Les droites étant parallèles, le théorème de Thalès donne $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = 0,4$, donc $BC = \frac{2,6}{0,4} = 6,5$ m (0,5 pt). AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport 0,4, positif car M et B sont du même côté de A (0,5 pt). (1)
- c) $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{4}$ et $\frac{AQ}{AC} = \frac{2,7}{3,5}$. Produits en croix : $3 \times 3,5 = 10,5$ et $4 \times 2,7 = 10,8$; ils sont différents, donc les rapports aussi (0,5 pt). D'après la contraposée du théorème de Thalès, la poutre $[PQ]$ n'est pas parallèle à la base (0,5 pt). (1)
- d) Il faut $\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = 0,75$, soit $AQ = 0,75 \times 3,5 = 2,625$ m ; la poutre serait alors l'image de $[BC]$ par l'homothétie de centre A et de rapport 0,75 : $PQ = 0,75 \times 6,5 = 4,875$ m (0,5 pt). (1)

Astuce — pour comparer deux quotients sans arrondi, on compare les produits en croix : c'est plus sûr que des valeurs approchées, qui peuvent faire croire à tort à une égalité.

Exercice 4 – Problème — le cornet de glace

(4 pts)

- a) (IM) et (OA) sont toutes deux perpendiculaires à l'axe (SO) ; deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles (0,5 pt). Les points S, I, O et S, M, A sont alignés : d'après le théorème de Thalès, $\frac{SI}{SO} = \frac{IM}{OA}$, soit $\frac{8}{12} = \frac{IM}{3}$ (0,5 pt). Donc $IM = \frac{8 \times 3}{12} = 2$ cm (0,5 pt). (1)
- b) $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 12 = \frac{108\pi}{3} = 36\pi$ cm³ (0,5 pt), soit environ 113 cm³ (0,5 pt). (1)
- c) $k = \frac{SI}{SO} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ (0,5 pt). Les volumes sont multipliés par $k^3 = \frac{8}{27}$: volume de glace = $36\pi \times \frac{8}{27} = \frac{288\pi}{27} = \frac{32\pi}{3} \approx 33,5$ cm³ ; vérification directe : $\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 8 = \frac{32\pi}{3}$ (0,5 pt). (1)
- d) Tom se trompe : la glace occupe $\frac{8}{27} \approx 0,296$ du volume, soit moins de 30 % du cornet, bien loin des deux tiers (environ 67 %) (0,5 pt). (1)

Piège — dans un cône, la glace se trouve surtout près de l'ouverture : le volume suit le cube du coefficient, si bien qu'un remplissage aux deux tiers de la hauteur ne représente même pas un tiers du volume.

Exercice 5 – Problème — la largeur de la rivière

(4 pts)

- a) Les droites (AT) et (BD) sont toutes deux perpendiculaires à la berge (AB) ; or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles (0,5 pt). (1)
- b) Les points A, O, B sont alignés, ainsi que T, O, D , et $(AT) \parallel (BD)$: c'est une configuration « papillon » de centre O . D'après le théorème de Thalès, $\frac{OA}{OB} = \frac{OT}{OD} = \frac{AT}{BD}$ (0,5 pt). Donc $\frac{30}{10} = \frac{AT}{8}$ (0,5 pt), et $AT = 3 \times 8 = 24$ m (0,5 pt). (1)
- c) Le centre est O (0,5 pt). A est l'image de B et O est situé entre B et A : le rapport est négatif ; sa distance à zéro vaut $\frac{OA}{OB} = 3$, donc $k = -3$ (0,5 pt). (1)
- d) Le triangle OAT est rectangle en A . D'après le théorème de Pythagore, $OT^2 = OA^2 + AT^2 = 30^2 + 24^2 = 900 + 576 = 1\,476$ (0,5 pt), donc $OT = \sqrt{1\,476} \approx 38,4$ m (0,5 pt). (1)

Méthode — pour une mesure inaccessible, on construit sur le terrain un petit triangle semblable au grand, dont toutes les longueurs sont mesurables ; le coefficient fait le reste.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).