

Corrigé et barème – Thalès, triangles semblables et homothétie — niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Questions flash

(4 pts)

- a) Les longueurs sont multipliées par 1,5, la distance à zéro du rapport : $4 \times 1,5 = 6$ cm (0,5 pt). Une homothétie conserve les angles : l'angle image mesure encore 40° (0,5 pt). Le signe « - » indique seulement que l'image est de l'autre côté du centre. (1)
- b) $[AB]$ et $[DE]$ sont homologues : le coefficient de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5$ (0,5 pt). $[BC]$ est l'homologue de $[EF]$, donc $EF = 1,5 \times BC$ et $BC = \frac{9}{1,5} = 6$ cm (0,5 pt). (1)
- c) Coefficient d'agrandissement : $k = \frac{25}{10} = 2,5$; nouvelle longueur : $15 \times 2,5 = 37,5$ cm (0,5 pt). L'aire est multipliée par $k^2 = 2,5^2 = 6,25$; vérification : $10 \times 15 = 150$ cm², $25 \times 37,5 = 937,5$ cm² et $150 \times 6,25 = 937,5$ (0,5 pt). (1)
- d) Les points K, P, L et K, Q, M sont alignés et $(PQ) \parallel (LM)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{KP}{KL} = \frac{KQ}{KM}$ (0,5 pt). Donc $\frac{KQ}{10} = \frac{3}{5}$ et $KQ = \frac{3}{5} \times 10 = 6$ cm (0,5 pt). (1)

Méthode — commence toujours par écrire le coefficient comme le quotient de deux longueurs homologues, avec la figure d'arrivée au numérateur : tu évites ainsi de multiplier quand il fallait diviser.

Exercice 2 – Du petit au grand triangle

(4 pts)

- a) $M \in [AB]$, donc $AB = AM + MB = 2,4 + 3,6 = 6$ cm. Les points A, M, B et A, N, C sont alignés et $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{2,4}{6} = \frac{3,2}{AC} = \frac{4}{BC}$ (0,5 pt). $AC = \frac{3,2 \times 6}{2,4} = \frac{19,2}{2,4} = 8$ cm (0,5 pt) ; $BC = \frac{4 \times 6}{2,4} = \frac{24}{2,4} = 10$ cm (0,5 pt). (1)
- b) L'angle $\widehat{MAN}$ est commun aux deux triangles. Les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ sont correspondants, formés par les parallèles (MN) et (BC) et la sécante (AB) : ils sont égaux (0,5 pt). Les deux triangles ont deux angles égaux deux à deux, donc ils sont semblables ; coefficient de AMN vers ABC : $k = \frac{AB}{AM} = \frac{6}{2,4} = 2,5$ (vérification : $\frac{AC}{AN} = \frac{8}{3,2} = 2,5$) (0,5 pt). (1)
- c) Le centre est A . Les points M et B sont du même côté de A , donc le rapport est positif : $k = 2,5$ (0,5 pt). (1)
- d) $MN^2 = 4^2 = 16$ et $AM^2 + AN^2 = 2,4^2 + 3,2^2 = 5,76 + 10,24 = 16$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, AMN est rectangle en A (0,5 pt). Aire de AMN : $\frac{2,4 \times 3,2}{2} = 3,84$ cm² ; les aires sont multipliées par $k^2 = 6,25$, donc aire de $ABC = 3,84 \times 6,25 = 24$ cm² (vérification : $\frac{6 \times 8}{2} = 24$) (0,5 pt). (1)

Astuce — le coefficient se lit sur deux longueurs connues du même côté (AB et AM) ; il donne ensuite toutes les autres longueurs, et son carré donne l'aire sans nouveau calcul de hauteur.

Exercice 3 – Parallèles ou pas ?

(4 pts)

- a) $\frac{GE}{GS} = \frac{4,2}{7} = 0,6$ et $\frac{GF}{GT} = \frac{3,6}{6} = 0,6$ (0,5 pt). Les rapports sont égaux et les points G, E, S et G, F, T sont alignés dans le même ordre (0,5 pt). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(EF) \parallel (ST)$ (0,5 pt). (1)
- b) Comme $(EF) \parallel (ST)$, le théorème de Thalès donne $\frac{GE}{GS} = \frac{GF}{GT} = \frac{EF}{ST}$: les côtés de GST sont proportionnels à ceux de GEF , avec le coefficient $k = \frac{GF}{GE} = \frac{6}{4,2} = \frac{10}{7} = \frac{5}{3,5}$ (0,5 pt). $ST = \frac{5}{3,5} \times EF = \frac{5}{3,5} \times 3 = 5$ cm (0,5 pt). (1)
- c) $\frac{OU}{OV} = \frac{2,5}{4} = 0,625$ et $\frac{OW}{OZ} = \frac{3}{5} = 0,6$ (0,5 pt). Les rapports sont différents ; or, si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès les rendrait égaux. D'après la contraposée du théorème de Thalès, (UW) et (VZ) ne sont pas parallèles (0,5 pt). (1)
- d) Les points sont déjà disposés en « papillon » ; il faut $\frac{OW}{OZ} = \frac{OU}{OV} = 0,625$, soit $OZ = \frac{3}{0,625} = 4,8$ cm (vérification : $\frac{3}{4,8} = 0,625$) (0,5 pt). (1)

Piège — des rapports égaux ne suffisent pas pour la réciproque : il faut aussi que les points soient alignés dans le même ordre ; en revanche, des rapports différents suffisent toujours pour conclure au non-parallélisme (contraposée).

Exercice 4 – Image d'un rectangle

(4 pts)

- a) Une homothétie conserve les mesures d'angles : les quatre angles de $E'F'G'H'$ sont droits, comme ceux de $EFGH$ (0,5 pt). Un quadrilatère qui a quatre angles droits est un rectangle : $E'F'G'H'$ est un rectangle (0,5 pt). (1)
- b) Les longueurs sont multipliées par 1,5 : $E'F' = 4 \times 1,5 = 6$ cm et $F'G' = 3 \times 1,5 = 4,5$ cm (0,5 pt). Dans le triangle EFG rectangle en F , d'après le théorème de Pythagore : $EG^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, donc $EG = 5$ cm (0,5 pt). Ainsi $E'G' = 5 \times 1,5 = 7,5$ cm ; vérification : $6^2 + 4,5^2 = 36 + 20,25 = 56,25 = 7,5^2$ (0,5 pt). (1)
- c) Directement : $6 \times 4,5 = 27$ cm² (0,5 pt). Avec le rapport : l'aire de $EFGH$ vaut $4 \times 3 = 12$ cm² et les aires sont multipliées par $(-1,5)^2 = 2,25$, d'où $12 \times 2,25 = 27$ cm² (0,5 pt). (1)
- d) Le centre d'une homothétie est sa propre image : l'image de O est O . Or O est le milieu de $[EG]$, et une homothétie conserve les milieux : O est donc aussi le milieu de $[E'G']$, c'est-à-dire le centre du rectangle $E'F'G'H'$ (0,5 pt). (1)

Erreur fréquente — pour l'aire, on multiplie par $k^2 = 2,25$ et non par 1,5 ; avec un rapport négatif, k^2 reste positif, et une aire n'est jamais négative.

Exercice 5 – Problème — le vidéoprojecteur**(4 pts)**

- a) H est le centre de la première image, donc $HB = 1,8 \div 2 = 0,9$ m (0,5 pt). Les points P, H, H' et P, B, B' sont alignés et $(HB) \parallel (H'B')$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{PH}{PH'} = \frac{HB}{H'B'}$, soit $\frac{3,6}{4,8} = \frac{0,9}{H'B'}$, donc $H'B' = \frac{0,9 \times 4,8}{3,6} = \frac{4,32}{3,6} = 1,2$ m (0,5 pt). H' étant le centre de la nouvelle image, sa largeur vaut $2 \times 1,2 = 2,4$ m (0,5 pt). (1)
- b) $k = \frac{PH'}{PH} = \frac{4,8}{3,6} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$; il est positif car les deux images sont du même côté de P (0,5 pt).
Hauteur : $1,35 \times \frac{4}{3} = \frac{5,4}{3} = 1,8$ m (0,5 pt). (1)
- c) Aires : $1,8 \times 1,35 = 2,43$ m² et $2,4 \times 1,8 = 4,32$ m² (0,5 pt). $\frac{4,32}{2,43} = \frac{432}{243} = \frac{16 \times 27}{9 \times 27} = \frac{16}{9}$, et l'on retrouve bien $k^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ (0,5 pt). (1)
- d) La largeur de l'image est proportionnelle à la distance d entre l'objectif et l'écran : 1,8 m pour 3,6 m, donc largeur = $\frac{1,8}{3,6} \times d = 0,5 d$. Il faut $0,5 d \leq 3$, soit $d \leq 6$: l'objectif doit être à 6 m au plus du mur (0,5 pt). (1)

Méthode — dans un problème concret, dessine la situation vue de dessus : le point d'où partent les rayons est le centre de l'homothétie, et les distances à ce point donnent directement le rapport.