

Corrigé et barème – Statistiques et probabilités — niveau



Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Vrai. Écarts à 1 000 : -2 ; $+3$; $+1$; -3 ; $+6$, de somme 5 ; écart moyen $\frac{5}{5} = 1$, donc moyenne = $1\,000 + 1 = 1\,001$. (0,5 pt méthode + 0,5 pt conclusion) (1)
- b) Faux. Il y a 36 couples équiprobables, dont 6 doubles. Par l'événement contraire : $P = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. (0,5 pt contraire + 0,5 pt résultat) (1)
- c) Faux. Étendue nulle : la plus grande et la plus petite valeur sont égales, donc les 5 nombres sont égaux. Leur moyenne est alors cette valeur commune, 10 : les 5 nombres valent 10 et la médiane aussi. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — pour la moyenne de grands nombres voisins, on calcule la moyenne des écarts à une valeur ronde, puis on l'ajoute à cette valeur.

Exercice 2 – Calculs en cascade

(4 pts)

- a) $\frac{12,5 \times 4 + 15 \times 2 + 8 \times 2}{4 + 2 + 2} = \frac{50 + 30 + 16}{8} = \frac{96}{8} = 12$. (0,5 pt formule + 0,5 pt résultat) (1)
- b) $P(V) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$. Avec 48 boules : $\frac{48}{3} = 16$ rouges, $\frac{48}{4} = 12$ bleues et $48 \times \frac{5}{12} = 20$ vertes ; vérification : $16 + 12 + 20 = 48$. (0,5 pt probabilité + 0,5 pt effectifs) (1)
- c) Deux vertes : $\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$. Même couleur, trois chemins incompatibles : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{25}{144} = \frac{16}{144} + \frac{9}{144} + \frac{25}{144} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) $\frac{1}{6} = \frac{24}{144}$ et $\frac{24}{144} < \frac{25}{144}$: la probabilité d'obtenir deux boules vertes est légèrement supérieure à $\frac{1}{6}$. (0,5 pt dénominateur commun + 0,5 pt conclusion) (1)

Méthode — pour comparer deux fractions sans calculatrice, on les écrit avec le même dénominateur ; ici 144 est un multiple de 6, le calcul est immédiat.

Exercice 3 – Recherche — les séries cachées

(5 pts)

- a) 5 valeurs rangées : la médiane est la 3^e, donc $c = 6$. Moyenne 5 : somme = $5 \times 5 = 25$, d'où $a + b + d + e = 25 - 6 = 19$. Étendue : $e - a = 8$, donc $e = a + 8$. (0,5 pt médiane + 0,5 pt somme et étendue) (1,25)
- b) En remplaçant e : $a + b + d + a + 8 = 19$, soit $2a + b + d = 11$. Or $b \geq a$ et $d \geq c = 6$, donc $11 = 2a + b + d \geq 2a + a + 6 = 3a + 6$, d'où $3a \leq 5$. Comme a est un entier positif ou nul, $a = 0$ ou $a = 1$. (0,5 pt égalité + 1 pt inégalité et conclusion) (1,25)
- c) Si $a = 0$: $e = 8$ et $b + d = 11$ avec $6 \leq d \leq 8$; $d = 6, 7$ ou 8 donne $b = 5, 4$ ou 3 , qui conviennent : 0; 5; 6; 6; 8 puis 0; 4; 6; 7; 8 puis 0; 3; 6; 8; 8. Si $a = 1$: $e = 9$ et $b + d = 9$ avec $6 \leq d \leq 9$; $d = 6, 7$ ou 8 donne $b = 3, 2$ ou 1 , qui conviennent, et $d = 9$ donnerait $b = 0 < a$, exclu : 1; 3; 6; 6; 9 puis 1; 2; 6; 7; 9 puis 1; 1; 6; 8; 9. On a examiné toutes les valeurs possibles de a , puis de d : il y a exactement 6 séries. (0,5 pt cas $a = 0$ + 0,5 pt cas $a = 1$ + 0,5 pt justification d'exhaustivité) (1,25)
- d) Séries avec une valeur répétée : 0; 5; 6; 6; 8, 0; 3; 6; 8; 8, 1; 3; 6; 6; 9 et 1; 1; 6; 8; 9, soit 4 séries sur 6, équiprobables : $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. (0,5 pt dénombrement + 0,5 pt probabilité) (1,25)

Méthode — pour ne rien oublier, on encadre d'abord la plus petite valeur, puis on passe en revue une à une les valeurs possibles d'une autre inconnue : la liste est complète par construction.

Exercice 4 – Problème — combien de boules bleues ?

(4 pts)

- a) 6 boules : $P(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Deux chemins, (R ; B) et (B ; R) : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. (0,5 pt chemins + 0,5 pt calcul) (1)
- b) $n + 4$ boules : $P(R) = \frac{4}{n+4}$ et $P(B) = \frac{n}{n+4}$. Les deux chemins ont la même probabilité : $2 \times \frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+4} = \frac{8n}{(n+4)^2}$. (0,5 pt probabilités + 0,5 pt produit) (1)
- c) $\frac{8n}{(n+4)^2} = \frac{4}{9}$ donne $72n = 4(n+4)^2$, soit $18n = n^2 + 8n + 16$, donc $n^2 - 10n + 16 = 0$. Or $(n - 2)(n - 8) = n^2 - 8n - 2n + 16 = n^2 - 10n + 16$. Équation produit : $n = 2$ ou $n = 8$. Vérification pour $n = 8$: $\frac{64}{144} = \frac{4}{9}$. Le sac contient 2 ou 8 boules bleues. (0,5 pt mise en équation + 0,5 pt factorisation + 0,5 pt conclusion) (1)
- d) On attend environ $\frac{4}{9} \times 900 = 400$ fois ; 412 en est proche ($\frac{412}{900} \approx 0,46$ contre $\frac{4}{9} \approx 0,44$) : c'est cohérent, la fréquence fluctue autour de la probabilité. (0,5 pt) (1)

Piège — trouver une solution ($n = 2$) ne suffit pas : l'équation en a une seconde, et « toutes les valeurs » oblige à passer par une équation plutôt que par des essais.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — au-dessus de la moyenne*(4 pts)*

- a) Moyenne : $\frac{2+3+4+15}{4} = \frac{24}{4} = 6$; médiane : $\frac{3+4}{2} = 3,5$. Seul 15 dépasse 6 : $P(S) = \frac{1}{4}$. Une valeur très grande tire la moyenne vers le haut. (0,5 pt indicateurs + 0,5 pt probabilité) (1)
- b) Par exemple 0; 10; 10; 10 : moyenne $\frac{30}{4} = 7,5$, et trois valeurs sur quatre dépassent 7,5, d'où $P(S) = \frac{3}{4}$. Toute série correcte et vérifiée est acceptée. (0,5 pt série + 0,5 pt vérification) (1)
- c) Raisonnement par l'absurde : supposons que les n valeurs soient toutes strictement supérieures à la moyenne m . En les additionnant, leur somme serait strictement supérieure à $n \times m$. Or $n \times m$ est exactement la somme des valeurs : la somme serait strictement supérieure à elle-même, c'est impossible. Au moins une valeur est donc inférieure ou égale à m , et $P(S) < 1$. (0,5 pt hypothèse + 0,5 pt somme + 0,5 pt conclusion) (1)
- d) La somme initiale vaut $n \times m$. Nouvelle moyenne : $\frac{n \times m + m}{n + 1} = \frac{m(n + 1)}{n + 1} = m$. (0,5 pt) (1)

Erreur fréquente — croire que la moitié des valeurs dépasse toujours la moyenne : c'est la médiane qui partage la série en deux, pas la moyenne.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).