

Corrigé et barème – Fonctions, fonctions linéaires et affines, proportionnalité et vitesse — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Calculs en cascade

(4 pts)

- a) $\frac{3}{4} \times \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$ (0,5 pt) ; $f\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{6}{6} = -1$ (0,5 pt). (1)
- b) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}x = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$ (0,5 pt) ; $x = \frac{7}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}$. Contrôle : $\frac{3}{4} \times \frac{14}{9} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$ et $\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (0,5 pt). (1)
- c) Il faut un coefficient k tel que $1,2 \times k = 1$, soit $k = \frac{1}{1,2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ (0,5 pt). La baisse est de $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$, soit $\frac{100}{6} \% = \frac{50}{3} \% \approx 16,7 \%$ (0,5 pt). (1)
- d) 324 km/h, c'est 324 000 m en 3 600 s, soit $\frac{324\,000}{3\,600} = 90$ m/s (0,5 pt). Durée : $\frac{1\,350}{90} = 15$ s (0,5 pt). (1)

Astuce — pour passer des km/h aux m/s, on divise par 3,6 ($324 \div 3,6 = 90$) ; dans l'autre sens, on multiplie par 3,6.

Exercice 2 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) P appartient à la droite si et seulement si $f(3) = 20$, c'est-à-dire $3a + b = 20$. (0,5 pt) (1)
- b) f strictement croissante impose $a > 0$, donc $a \geq 1$. De plus $b = 20 - 3a \geq 0$ impose $3a \leq 20$, donc $a \leq 6$ puisque $3 \times 7 = 21 > 20$ (0,5 pt). Chaque valeur de a entre 1 et 6 donne un unique b : $(a; b) = (1; 17), (2; 14), (3; 11), (4; 8), (5; 5), (6; 2)$. Il y a donc exactement six fonctions, de $f(x) = x + 17$ à $f(x) = 6x + 2$ (1 pt). (1)
- c) Une fonction linéaire a $b = 0$, ce qui donnerait $3a = 20$, soit $a = \frac{20}{3}$, qui n'est pas entier. Aucune de ces fonctions n'est linéaire. (1 pt) (1)
- d) $f(-1) = -a + b = 0$ donne $b = a$; avec $3a + b = 20 : 4a = 20$, donc $a = 5$ et $b = 5$. C'est $f(x) = 5x + 5$; contrôle : $f(3) = 20$ et $f(-1) = -5 + 5 = 0$. (1 pt) (1)

Méthode — pour ne rien oublier, on encadre l'inconnue ($1 \leq a \leq 6$) puis on passe en revue chaque valeur possible : l'encadrement prouve qu'il n'existe pas d'autre solution.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Sami a raison. Si $f(x) = kx$, alors $f(u + v) = k(u + v) = ku + kv = f(u) + f(v)$ par distributivité. (1 pt) (1)
- b) Inès a raison. Avec $f(x) = ax + b : 3a + b = 7a + b$ donne $4a = 0$, donc $a = 0$ et $f(x) = b$ pour tout x . (1 pt) (1)
- c) Lou a tort. 1 cm représente 50 000 cm = 0,5 km ; un carré de 1 cm de côté représente donc un carré de 0,5 km de côté, d'aire $0,5^2 = 0,25$ km². (1 pt) (1)
- d) Emma a tort. Le coefficient global est $1,1 \times 1,1 = 1,21$: c'est une hausse de 21 %, car la seconde hausse porte sur un prix déjà augmenté. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — les longueurs se multiplient par l'échelle, mais les aires par son carré ; de même, des évolutions successives se multiplient sous forme de coefficients, leurs pourcentages ne s'additionnent pas.

Exercice 4 – Problème — la rencontre

(4 pts)

- a) Cycliste : $c(t) = 18t$, fonction linéaire (0,5 pt). À l'instant t , le piéton marche depuis $t - \frac{1}{3}$ heure et s'est rapproché de A de $6\left(t - \frac{1}{3}\right) = 6t - 2$ km ; sa distance à A est $p(t) = 42 - (6t - 2) = 44 - 6t$, fonction affine (1 pt). (1,33333)
- b) On résout $18t = 44 - 6t : 24t = 44$, donc $t = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$ h = 1 h 50 min ; ils se croisent à 9 h 50 (1 pt). Distance à A : $18 \times \frac{11}{6} = 33$ km ; contrôle : le piéton a marché de 8 h 20 à 9 h 50, soit 1,5 h et $6 \times 1,5 = 9$ km, et $42 - 9 = 33$ km (0,5 pt). (1,33333)
- c) $18t = 42$ donne $t = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$ h = 2 h 20 min : le cycliste arrive en B à 10 h 20 (0,5 pt). $p\left(\frac{7}{3}\right) = 44 - 6 \times \frac{7}{3} = 44 - 14 = 30$: le piéton est à 30 km de A, donc à 12 km de B (0,5 pt). (1,33333)

Piège — le piéton part 20 minutes plus tard : $20 \text{ min} = \frac{1}{3}$ h, et non 0,2 h ; oublier ce décalage, ou mal le convertir, fausse l'heure de la rencontre.

Exercice 5 – Pour aller plus loin

(4 pts)

- a) $f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au - av = a(u - v)$. Comme $u \neq v$, $u - v \neq 0$ et l'on peut diviser : $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$. (1 pt) (1)
- b) D'après la question précédente, $a = \frac{35}{2026 - 2016} = \frac{35}{10} = 3,5$ (0,5 pt). Donc $f(2046) - f(2026) = a \times (2046 - 2026) = 3,5 \times 20 = 70$ (0,5 pt). (1)
- c) Membre de gauche : $a \times \frac{u+v}{2} + b = \frac{au+av}{2} + b$. Membre de droite : $\frac{(au+b) + (av+b)}{2} = \frac{au+av}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{au+av}{2} + b$. Les deux membres sont égaux. (1 pt) (1)
- d) Non. Contre-exemple avec $u = 0$ et $v = 2$: $g\left(\frac{0+2}{2}\right) = g(1) = 1$, mais $\frac{g(0) + g(2)}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \neq 1$. (1 pt) (1)

Méthode — pour une fonction affine, l'écart entre deux images est proportionnel à l'écart entre les nombres de départ, de coefficient a : c'est ce qui permet de conclure sans connaître b .