Corrigé et barème – espace et volumes — niveau ★★★

Durée : 55 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Exercice 1 – Corriger une copie *(4 pts)*

a) Noé met le diamètre au carré : il faut le rayon, $10 \div 2 = 5$ cm. 2) Il prend la génératrice (13 cm) pour la hauteur : la hauteur est perpendiculaire à la base, alors que la génératrice relie le sommet au bord du disque de base. (0,5 pt par erreur) (1)

b) La hauteur, le rayon et la génératrice forment un triangle rectangle : $h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc $h = 12$ cm. $V = \dfrac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = 100\pi$ cm³ $\approx 314{,}2$ cm³. (0,5 pt hauteur + 0,5 pt volume) (1)

c) 4,8 cm est la distance à la base : le petit cône a pour hauteur $12 - 4{,}8 = 7{,}2$ cm. 2) k est un quotient de hauteurs : on divise par la hauteur 12, pas par la génératrice 13. $k = \dfrac{7{,}2}{12} = 0{,}6$. (0,5 pt les deux erreurs + 0,5 pt k) (1)

d) Noé multiplie le volume par k : il faut multiplier par k^3. $100\pi \times 0{,}6^3 = 100\pi \times 0{,}216 = 21{,}6\pi$ cm³ $\approx 67{,}9$ cm³. Autre façon : rayon $5 \times 0{,}6 = 3$ cm et hauteur 7,2 cm, d'où $\dfrac{\pi \times 3^2 \times 7{,}2}{3} = 21{,}6\pi$ cm³. (0,5 pt erreur + 0,5 pt calcul juste) (1)

Erreur fréquente — trois confusions classiques dans une même copie : diamètre au lieu du rayon, génératrice au lieu de la hauteur, k au lieu de k^3. Avant de calculer, je fais un croquis où j'écris le rayon, la hauteur et la génératrice.

Exercice 2 – Problème — Trois balles dans un tube *(4 pts)*

a) Rayon du tube : 3,3 cm ; hauteur : trois diamètres, $6 \times 3{,}3 = 19{,}8$ cm. Tube : $\pi \times 3{,}3^2 \times 19{,}8 = 215{,}622\pi$ cm³. Balles : $3 \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 3{,}3^3 = 4 \times 35{,}937\pi = 143{,}748\pi$ cm³. Air : $215{,}622\pi - 143{,}748\pi = 71{,}874\pi \approx 225{,}8$ cm³, exactement le tiers du tube. (0,5 pt dimensions + 0,5 pt volume d'air) (1)

b) La paroi déroulée est un rectangle de $2 \times \pi \times 3{,}3$ sur 19,8 cm : $2 \times \pi \times 3{,}3 \times 19{,}8 = 130{,}68\pi$ cm². Balles : $3 \times 4 \times \pi \times 3{,}3^2 = 12 \times 10{,}89\pi = 130{,}68\pi$ cm². Les deux aires sont égales (environ 410,5 cm²) : c'est le résultat d'Archimède sur la boule et son cylindre, répété trois fois. (0,5 pt les deux aires + 0,5 pt conclusion) (1)

c) Boîte : base carrée de 6,6 cm de côté, hauteur 19,8 cm, soit $6{,}6^2 \times 19{,}8 = 862{,}488$ cm³. Balles : $143{,}748\pi \approx 451{,}6$ cm³. Part : $\dfrac{143{,}748\pi}{862{,}488} \approx 0{,}524$, soit 52,4 %. Avec un rayon R : boîte $(2R)^2 \times 6R = 24R^3$, balles $3 \times \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$, quotient $\dfrac{4\pi R^3}{24R^3} = \dfrac{\pi}{6}$, qui ne dépend pas de R. (0,5 pt pourcentage + 0,5 pt cas général) (1)

d) Les quatre balles tiennent en hauteur : $4 \times 4{,}95 = 19{,}8$ cm. Chaque petite balle est une réduction d'une grande, de rapport $k = \dfrac{4{,}95}{6{,}6} = 0{,}75$: son volume est multiplié par $0{,}75^3 = 0{,}421\,875$. Quatre petites balles valent $4 \times 0{,}421\,875 = 1{,}687\,5$ grande balle, moins que trois. Lucas a tort : elles occupent $\dfrac{1{,}687\,5}{3} \times \dfrac{2}{3} = 0{,}375$, soit 37,5 % du tube, contre $\dfrac{2}{3} \approx 66{,}7$ % avec les trois grandes (calcul direct possible : $4 \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 2{,}475^3 \approx 80{,}86\pi$ cm³, et $80{,}86 \div 215{,}622 \approx 0{,}375$). (0,5 pt k^3 + 0,5 pt conclusion chiffrée) (1)

Astuce — pour comparer des boules de tailles différentes, je passe par le rapport de réduction : rayon $\times k$, volume $\times k^3$. Quatre balles réduites de rapport 0,75 n'atteignent même pas le volume de deux grandes.

Exercice 3 – Problème — Par le pôle ou par le parallèle ? *(4 pts)*

a) A et B ont la même latitude, 42° N : ils sont sur le parallèle 42° N. Leurs longitudes sont de part et d'autre de Greenwich : écart $60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, les deux méridiens sont opposés. Ils sont donc dans un même plan qui contient l'axe des pôles, donc qui passe par O : chacun est une moitié de grand cercle, et ensemble ils forment un grand cercle complet passant par les deux pôles. (0,5 pt même parallèle + 0,5 pt grand cercle justifié) (1)

b) L'écart de longitude vaut 180° dans les deux sens ($360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$) : la route est un demi-parallèle, quel que soit le sens. Rayon du parallèle : $6\,371 \times \cos 42^\circ$. Longueur : $\pi \times 6\,371 \times \cos 42^\circ \approx 14\,874$ km. (0,5 pt demi-parallèle + 0,5 pt longueur) (1)

c) De A au pôle Nord : $90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$; du pôle à B, de même 48°. Au total, 96° d'un grand cercle : $2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{96}{360} \approx 10\,675$ km. La route 2 est la plus courte, d'environ $14\,874 - 10\,675 = 4\,199$ km. (0,5 pt 96° + 0,5 pt longueur et comparaison) (1)

d) Route du parallèle : $\pi \times 6\,371 \times \cos 10^\circ \approx 19\,711$ km. Route par le pôle : $2 \times (90^\circ - 10^\circ) = 160^\circ$ d'un grand cercle, soit $2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{160}{360} \approx 17\,791$ km. Yanis a tort : même à 10° N, passer par le pôle reste plus court, d'environ 1 920 km. (0,5 pt les deux longueurs + 0,5 pt conclusion) (1)

Piège — un parallèle n'est pas un grand cercle : le suivre n'est pas forcément le plus court. Ici, la route par le pôle suit un grand cercle (deux méridiens opposés) et gagne des milliers de kilomètres.

Exercice 4 – Problème — Le seau *(4 pts)*

a) Le fond est la section du grand cône par un plan parallèle à sa base : c'est une réduction de la base, et le petit cône est une réduction du grand, de rapport $k = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ (quotient des rayons). Les hauteurs sont dans le même rapport : la hauteur du petit cône est $H - 24 = \dfrac{2}{3}H$, donc $\dfrac{1}{3}H = 24$ et $H = 72$ cm (petit cône : 48 cm). (0,5 pt k + 0,5 pt H) (1)

b) Grand cône : $\dfrac{\pi \times 15^2 \times 72}{3} = 5\,400\pi$ cm³. Petit cône : $5\,400\pi \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = 5\,400\pi \times \dfrac{8}{27} = 1\,600\pi$ cm³ (ou $\dfrac{\pi \times 10^2 \times 48}{3}$). Seau : $5\,400\pi - 1\,600\pi = 3\,800\pi$ cm³ $\approx 11\,938$ cm³, soit environ 11,9 L. (0,5 pt les deux cônes + 0,5 pt contenance) (1)

c) La surface de l'eau est la section du grand cône par un plan parallèle à sa base, à $48 + 12 = 60$ cm de S. Rapport : $\dfrac{60}{72} = \dfrac{5}{6}$, donc rayon $= 15 \times \dfrac{5}{6} = 12{,}5$ cm. (0,5 pt hauteur depuis S + 0,5 pt rayon) (1)

d) Eau = cône de hauteur 60 cm moins le petit cône : $5\,400\pi \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 - 1\,600\pi = 3\,125\pi - 1\,600\pi = 1\,525\pi$ cm³ $\approx 4{,}8$ L. Part : $\dfrac{1\,525}{3\,800} \approx 0{,}401$, soit environ 40 % : Inès a tort. Le seau s'évase vers le haut, donc sa moitié haute contient plus d'eau que sa moitié basse. (0,5 pt volume d'eau + 0,5 pt conclusion) (1)

Méthode — un tronc de cône se traite en complétant le cône : je trouve la hauteur totale grâce au rapport de réduction, puis volume du tronc = grand cône − petit cône.

Exercice 5 – Couper une boule ou un cube *(4 pts)*

a) Faux. Contre-exemple : cube $ABCDEFGH$ d'arête 5 cm et plan qui contient les arêtes $[AE]$ et $[CG]$ (il est parallèle à l'arête $[BF]$). La section est le rectangle $ACGE$, avec $AE = 5$ cm et, d'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en B, $AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, donc $AC = \sqrt{50} \approx 7{,}07$ cm : ce rectangle n'est pas un carré. (0,5 pt faux + 0,5 pt contre-exemple calculé) (1)

b) Faux. $r^2 = 10^2 - 5^2 = 75$: le disque a pour aire 75π cm², contre 100π cm² en coupant par le centre. C'est les $\dfrac{3}{4}$, pas la moitié : l'aire de la section ne diminue pas proportionnellement à la distance au centre. (0,5 pt calcul + 0,5 pt conclusion) (1)

c) Rayon de la face : $r = 3{,}5$ cm. Avec $r^2 + d^2 = R^2$: $d^2 = 12{,}5^2 - 3{,}5^2 = 156{,}25 - 12{,}25 = 144$, donc $d = 12$ cm. Posée sur sa face, la boule monte jusqu'au point opposé : hauteur $= d + R = 12 + 12{,}5 = 24{,}5$ cm. (0,5 pt distance + 0,5 pt hauteur) (1)

d) Juste. 2,5 m = 250 cm, donc le cercle a pour rayon $r = \dfrac{250}{2 \times \pi} = \dfrac{125}{\pi} \approx 39{,}79$ cm (moins que 41 cm : c'est possible). Avec $r^2 + d^2 = R^2$: $d^2 = 41^2 - \left(\dfrac{125}{\pi}\right)^2 \approx 1\,681 - 1\,583{,}1 = 97{,}9$, donc $d \approx 9{,}9$ cm : le plan est bien à moins de 10 cm du centre. (0,5 pt rayon + 0,5 pt distance et conclusion) (1)

Erreur fréquente — le rayon de la section d'une sphère ne diminue pas proportionnellement à la distance au centre : il se calcule toujours avec $r^2 = R^2 - d^2$ (triangle rectangle OHM).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).