Devoir surveillé – espace et volumes — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Problème — La Géode *(4 pts)*

La Géode, salle de cinéma du parc de la Villette à Paris, a la forme d'une sphère de 36 m de diamètre, recouverte de 6 433 triangles d'acier poli. On l'assimile à une boule de centre O, et on admet que les triangles recouvrent toute la sphère.

a) Calcule l'aire de la sphère, exacte puis au m² près. Quelle est, en moyenne, l'aire d'un triangle, au centième de m² ?

b) Calcule le volume de la boule, exact puis au m³ près. Combien de litres cela représente-t-il ?

c) Dans ce problème, on suppose que le plancher de la salle est la section de la boule par un plan horizontal situé à 6 m sous le centre O. Quelle est la nature de cette section ? Calcule son rayon au cm près et son aire au m² près.

d) Une maquette de la Géode est une réduction de rapport $k = \dfrac{1}{200}$. Donne son diamètre en cm, puis calcule son volume en cm³ à partir du volume de la Géode, au dixième. Vérifie avec la formule du volume de la boule.

Exercice 2 – Problème — Le silo à blé *(4 pts)*

Un silo est formé d'un cylindre de révolution de rayon 3 m et de hauteur 8 m, posé sur un cône de révolution de même rayon et de hauteur 4 m, pointe en bas. On admet qu'un mètre cube de blé a une masse de 780 kg.

a) Calcule le volume total du silo, exact puis au m³ près.

b) Quelle masse de blé contient le silo plein ? Donne-la à la tonne près.

c) On coupe le silo par un plan vertical qui contient son axe. Décris la section (fais un croquis à main levée), puis calcule son aire et la longueur d'une génératrice du cône.

d) Le silo est rempli à 75 % de son volume. Calcule la hauteur du blé, mesurée depuis la pointe du cône, au cm près.

Exercice 3 – Problème — Le trajet d'un voilier *(4 pts)*

On assimile la Terre à une sphère de rayon 6 371 km. Un voilier part de $A\,(0^\circ ; 10^\circ\text{ E})$ et suit l'équateur vers l'ouest jusqu'à $B\,(0^\circ ; 40^\circ\text{ O})$. Il remonte ensuite vers le nord le long du méridien de B, jusqu'à $C\,(28^\circ\text{ N} ; 40^\circ\text{ O})$.

a) Quel écart de longitude sépare A et B ? Calcule la longueur de l'arc d'équateur AB, au km près.

b) Calcule la longueur de l'arc de méridien BC, au km près.

c) Le voilier avance à 15 km/h en moyenne, sans s'arrêter. Combien de temps dure le trajet de A à C ? Donne le résultat en jours et heures, à l'heure près.

d) Il rentre de C vers $D\,(28^\circ\text{ N} ; 10^\circ\text{ E})$ en suivant le parallèle de C. Calcule la longueur de ce trajet, au km près. Pourquoi est-il plus court que l'arc AB, alors que l'écart de longitude est le même ?

Exercice 4 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, réponds « vrai » ou « faux » et justifie par un calcul, un exemple ou une propriété du cours.

a) « Si on double le rayon d'une boule, son volume double. »

b) « Un plan parallèle à l'axe d'un cylindre de rayon 6,5 cm et de hauteur 12 cm peut le couper selon un carré. »

c) « Les points $(35^\circ\,\text{N}; 20^\circ\,\text{E})$ et $(35^\circ\,\text{S}; 20^\circ\,\text{E})$ sont plus éloignés l'un de l'autre, le long de leur méridien, que les points $(0^\circ; 30^\circ\,\text{O})$ et $(0^\circ; 40^\circ\,\text{E})$ le long de l'équateur, en passant par le méridien de Greenwich. »

d) « Pour une boule de rayon 3 cm, l'aire de la sphère (en cm²) et le volume de la boule (en cm³) s'écrivent avec le même nombre. »

Exercice 5 – Problème — La pyramide du Louvre *(4 pts)*

La pyramide du Louvre, à Paris, est une pyramide régulière de sommet S dont la base est le carré $ABCD$. On arrondit son côté à 35,4 m et sa hauteur SO à 21,6 m (O est le centre du carré). On note I le milieu de $[AB]$.

a) Calcule le volume de la pyramide, au m³ près.

b) Le triangle SOI est rectangle en O. Calcule SI au cm près, puis l'aire totale des quatre faces latérales (des triangles isocèles de hauteur $[SI]$), au m² près.

c) Un plan horizontal, situé à 16,2 m au-dessus du sol, coupe la pyramide. Quelle est la nature de la section ? Calcule le rapport de réduction et les dimensions de la section.

d) Calcule le volume de la petite pyramide située au-dessus de ce plan, au m³ près. Quelle part du volume total représente-t-elle, en pourcentage ?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).