Corrigé et barème – espace et volumes — niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Exercice 1 – Problème — La Géode *(4 pts)*

a) $R = 36 \div 2 = 18$ m. Aire $= 4 \times \pi \times 18^2 = 1\,296\pi$ m² $\approx 4\,072$ m². Par triangle : $1\,296\pi \div 6\,433 \approx 0{,}63$ m² (environ 63 dm²). (0,5 pt aire + 0,5 pt triangle) (1)

b) $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 18^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 5\,832 = 7\,776\pi$ m³ $\approx 24\,429$ m³. Comme 1 m³ = 1 000 L : environ 24 429 000 L, soit à peu près $2{,}44 \times 10^7$ L. (0,5 pt volume + 0,5 pt litres) (1)

c) La section d'une boule par un plan est un disque. Avec $d = 6$ m : $r^2 = 18^2 - 6^2 = 324 - 36 = 288$, donc $r = \sqrt{288} \approx 16{,}97$ m. Aire $= \pi \times r^2 = 288\pi \approx 905$ m² (on utilise $r^2 = 288$, sans arrondir). (0,5 pt nature et rayon + 0,5 pt aire) (1)

d) Diamètre : $36 \times \dfrac{1}{200} = 0{,}18$ m $= 18$ cm. Les volumes sont multipliés par $k^3 = \dfrac{1}{8\,000\,000}$: $7\,776\pi$ m³ $= 7\,776\pi \times 10^6$ cm³, et $\dfrac{7\,776\pi \times 10^6}{8 \times 10^6} = 972\pi$ cm³ $\approx 3\,053{,}6$ cm³. Vérification avec $R = 9$ cm : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 9^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 729 = 972\pi$ cm³. (0,5 pt diamètre + 0,5 pt volume) (1)

Astuce — je garde les valeurs exactes ($r^2 = 288$, 972π) jusqu'au bout et je n'arrondis qu'à la dernière étape : un rayon arrondi, mis au carré ou au cube, fausse le résultat.

Exercice 2 – Problème — Le silo à blé *(4 pts)*

a) Cylindre : $\pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi$ m³. Cône : $\dfrac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 12\pi$ m³. Total : 84π m³ ≈ 264 m³. (0,5 pt les deux volumes + 0,5 pt total) (1)

b) $84\pi \times 780 = 65\,520\pi$ kg $\approx 205\,837$ kg, soit environ 206 t (car 1 t = 1 000 kg). (0,5 pt calcul + 0,5 pt conversion) (1)

c) La section du cylindre par un plan qui contient l'axe est un rectangle de $2 \times 3 = 6$ m sur 8 m ; celle du cône est un triangle isocèle de base 6 m et de hauteur 4 m, collé sous le rectangle : la section est un pentagone. Aire $= 6 \times 8 + \dfrac{6 \times 4}{2} = 48 + 12 = 60$ m². Génératrice : la hauteur, le rayon et la génératrice forment un triangle rectangle, $g^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, donc $g = 5$ m. (0,5 pt description et aire + 0,5 pt génératrice) (1)

d) $0{,}75 \times 84\pi = 63\pi$ m³ de blé. Le cône, plein, en contient 12π ; il reste $63\pi - 12\pi = 51\pi$ m³ dans le cylindre, dont la base a pour aire 9π m² : hauteur $= 51\pi \div 9\pi = \dfrac{17}{3} \approx 5{,}67$ m. Depuis la pointe : $4 + 5{,}67 \approx 9{,}67$ m. (0,5 pt partage cône et cylindre + 0,5 pt hauteur) (1)

Méthode — pour un solide composé, je calcule séparément chaque solide usuel puis j'additionne ; pour une hauteur de remplissage, je remplis d'abord la partie basse (le cône) avant de répartir le reste dans le cylindre.

Exercice 3 – Problème — Le trajet d'un voilier *(4 pts)*

a) A est à $10°$ à l'est de Greenwich et B à $40°$ à l'ouest : le voilier franchit le méridien de Greenwich, l'écart est $10° + 40° = 50°$. L'équateur est un grand cercle : $AB = 2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{50}{360} \approx 5\,560$ km. (0,5 pt écart + 0,5 pt longueur) (1)

b) B est sur l'équateur (latitude $0°$) et C à $28°$ N : écart de $28°$, sur un méridien, moitié d'un grand cercle de rayon 6 371 km. $BC = 2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{28}{360} \approx 3\,113$ km. (0,5 pt écart + 0,5 pt longueur) (1)

c) Distance : $AB + BC = 2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{78}{360} \approx 8\,673$ km. Durée : $8\,673 \div 15 \approx 578$ h. Or $578 = 24 \times 24 + 2$: environ 24 jours et 2 heures. (0,5 pt durée en heures + 0,5 pt conversion) (1)

d) Rayon du parallèle $28°$ N : $6\,371 \times \cos 28° \approx 5\,625$ km. Écart de longitude : $40° + 10° = 50°$. $CD = 2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 28° \times \dfrac{50}{360} \approx 4\,909$ km. C'est plus court que AB (5 560 km) car ce parallèle n'est pas un grand cercle : son rayon $6\,371 \times \cos 28°$ est plus petit que 6 371, donc pour le même angle l'arc est plus court. (0,5 pt longueur + 0,5 pt explication) (1)

Erreur fréquente — on ne calcule pas un arc de parallèle avec le rayon de la Terre : seul l'équateur a pour rayon 6 371 km ; un autre parallèle a pour rayon 6 371 × cos(latitude).

Exercice 4 – Vrai ou faux ? *(4 pts)*

a) Faux. Avec le rayon $2R$: $\dfrac{4}{3} \times \pi \times (2R)^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 8R^3$: le volume est multiplié par $2^3 = 8$. Exemple : $R = 1$ cm donne $\dfrac{4}{3}\pi$ cm³, $R = 2$ cm donne $\dfrac{32}{3}\pi$ cm³, huit fois plus. (0,5 pt faux + 0,5 pt justification) (1)

b) Vrai. La section est un rectangle dont un côté est la hauteur, 12 cm ; l'autre est une corde du disque de base. Pour un carré, il faut une corde de 12 cm, de moitié 6 cm. La distance d du plan à l'axe vérifie (Pythagore) $d^2 = 6{,}5^2 - 6^2 = 42{,}25 - 36 = 6{,}25$, donc $d = 2{,}5$ cm : un plan parallèle à l'axe, à 2,5 cm de lui, coupe le cylindre selon un carré de 12 cm de côté. (0,5 pt vrai + 0,5 pt exemple calculé) (1)

c) Faux. Sur le méridien, les points sont de part et d'autre de l'équateur : écart $35° + 35° = 70°$. Sur l'équateur, ils sont de part et d'autre de Greenwich : écart $30° + 40° = 70°$. Un méridien est une moitié de grand cercle et l'équateur un grand cercle, tous deux de rayon 6 371 km : pour le même angle, les arcs sont égaux, $2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{70}{360} \approx 7\,784$ km chacun. (0,5 pt les deux écarts + 0,5 pt conclusion) (1)

d) Vrai. Aire : $4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi$ cm². Volume : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \dfrac{4 \times 27}{3}\pi = 36\pi$ cm³. Même nombre, $36\pi \approx 113{,}1$, mais pas la même grandeur : des cm² d'un côté, des cm³ de l'autre. (0,5 pt les deux calculs + 0,5 pt conclusion) (1)

Piège — pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, un seul contre-exemple suffit ; pour prouver qu'une situation est possible (« peut »), un seul exemple calculé suffit aussi.

Exercice 5 – Problème — La pyramide du Louvre *(4 pts)*

a) Aire de la base : $35{,}4^2 = 1\,253{,}16$ m². $V = \dfrac{1\,253{,}16 \times 21{,}6}{3} = 9\,022{,}752$ m³ $\approx 9\,023$ m³. (0,5 pt aire de la base + 0,5 pt volume) (1)

b) OI est la moitié du côté : $OI = 17{,}7$ m. D'après le théorème de Pythagore dans SOI rectangle en O : $SI^2 = 21{,}6^2 + 17{,}7^2 = 466{,}56 + 313{,}29 = 779{,}85$, donc $SI \approx 27{,}93$ m. Une face a pour aire $\dfrac{35{,}4 \times SI}{2}$; les quatre : $2 \times 35{,}4 \times SI \approx 1\,977$ m². (0,5 pt SI + 0,5 pt aire) (1)

c) Le plan est parallèle à la base : la section est un carré, réduction de la base. La petite pyramide au-dessus a pour hauteur $21{,}6 - 16{,}2 = 5{,}4$ m, mesurée depuis le sommet, donc $k = \dfrac{5{,}4}{21{,}6} = 0{,}25$. Côté de la section : $35{,}4 \times 0{,}25 = 8{,}85$ m. (0,5 pt k + 0,5 pt nature et côté) (1)

d) Volumes $\times k^3 = 0{,}25^3 = \dfrac{1}{64}$: $9\,022{,}752 \div 64 \approx 141$ m³. Vérification : $\dfrac{8{,}85^2 \times 5{,}4}{3} \approx 141$ m³. Part : $\dfrac{1}{64} = 0{,}015\,625$, soit environ $1{,}6\ \%$ du volume, alors que sa hauteur est le quart de la hauteur totale. (0,5 pt volume + 0,5 pt pourcentage) (1)

Erreur fréquente — la hauteur de la petite pyramide se mesure depuis le sommet : un plan à 16,2 m du sol est à $21{,}6 - 16{,}2 = 5{,}4$ m du sommet, et c'est 5,4 qui donne k, pas 16,2.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).