Corrigé et barème – espace et volumes — niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 3e

Exercice 1 – Le bac et la boule décorative *(4 pts)*

a) $V = 50 \times 24 \times 30 = 36\,000$ cm³. Comme 1 L = 1 000 cm³, la contenance est de 36 L. (0,5 pt volume + 0,5 pt conversion) (1)

b) 24 L = 24 000 cm³. L'eau forme un pavé droit dont la base est le fond du bac, d'aire $50 \times 24 = 1\,200$ cm² : hauteur = $24\,000 \div 1\,200 = 20$ cm. (0,5 pt conversion + 0,5 pt hauteur) (1)

c) Rayon : $R = 15 \div 2 = 7{,}5$ cm. $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 7{,}5^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 421{,}875 = 562{,}5\pi$ cm³ $\approx 1\,767$ cm³. (0,5 pt rayon et formule + 0,5 pt résultats) (1)

d) La boule mesure 15 cm de haut, moins que les 20 cm d'eau : elle est entièrement immergée. Le niveau monte d'une hauteur h telle que le pavé d'eau ajouté ait le volume de la boule : $1\,200 \times h = 562{,}5\pi$, donc $h = \dfrac{562{,}5\pi}{1\,200} \approx 1{,}473$ cm, soit environ 1,5 cm (15 mm). Le niveau passe à environ 21,5 cm : le bac ne déborde pas. (0,5 pt justification + 0,5 pt hausse) (1)

Méthode — un objet entièrement immergé fait monter l'eau d'un volume égal au sien : hausse du niveau = volume de l'objet ÷ aire du fond, avec toutes les longueurs dans la même unité.

Exercice 2 – Le globe terrestre *(4 pts)*

a) La carte recouvre une surface : la sphère de centre O et de rayon $R = 32 \div 2 = 16$ cm (la boule est le solide plein). Aire $= 4 \times \pi \times 16^2 = 1\,024\pi$ cm² $\approx 3\,217$ cm². (0,5 pt sphère justifiée + 0,5 pt aire) (1)

b) $V = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 16^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 4\,096 = \dfrac{16\,384}{3}\pi$ cm³ $\approx 17\,157{,}3$ cm³. Avec 1 L = 1 000 cm³ : environ 17,2 L. (0,5 pt valeur exacte + 0,5 pt litres) (1)

c) Le plan passe par le centre : la section est un grand cercle, de centre O et de rayon 16 cm. Sa longueur : $2 \times \pi \times 16 = 32\pi \approx 100{,}5$ cm. (0,5 pt grand cercle + 0,5 pt longueur) (1)

d) Une sphère coupée par un plan donne un cercle (ici, un parallèle du globe). Si H est le pied de la perpendiculaire au plan menée de O et M un point du cercle, le triangle OHM est rectangle en H : $r^2 = R^2 - d^2 = 16^2 - 9{,}6^2 = 256 - 92{,}16 = 163{,}84$, donc $r = \sqrt{163{,}84} = 12{,}8$ cm. (0,5 pt nature + 0,5 pt rayon) (1)

Erreur fréquente — on calcule avec le rayon, pas avec le diamètre : avec 32 au lieu de 16, l'aire serait 4 fois trop grande et le volume 8 fois trop grand.

Exercice 3 – Couper un pavé et une boîte de conserve *(4 pts)*

a) Un plan parallèle à une face coupe le pavé selon un rectangle de mêmes dimensions que cette face : $BC = 5$ cm sur $BF = AE = 7$ cm. (0,5 pt nature + 0,5 pt dimensions) (1)

b) La section est le rectangle $ACGE$ ($[AE]$ et $[CG]$ sont parallèles, de même longueur et perpendiculaires à la face $ABCD$). Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$, donc $AC = 13$ cm. Aire $= 13 \times 7 = 91$ cm². (0,5 pt AC + 0,5 pt aire) (1)

c) $V = \pi \times 4^2 \times 11 = 176\pi$ cm³ $\approx 552{,}9$ cm³ ; 1 cL = 10 cm³, donc environ 55 cL. Un plan perpendiculaire à l'axe donne un disque de même rayon que la base : 4 cm. (0,5 pt contenance + 0,5 pt section) (1)

d) La section est un rectangle dont un côté est la hauteur, 11 cm. L'autre côté est une corde du disque de base, à 2,4 cm du centre ; sa moitié ℓ vérifie (Pythagore) $\ell^2 = 4^2 - 2{,}4^2 = 16 - 5{,}76 = 10{,}24$, donc $\ell = 3{,}2$ cm et la corde mesure 6,4 cm. Rectangle de 6,4 cm sur 11 cm, d'aire $6{,}4 \times 11 = 70{,}4$ cm². (0,5 pt corde + 0,5 pt dimensions et aire) (1)

Astuce — pour une longueur dans une section (diagonale d'une face, corde d'un disque, rayon du cercle de section d'une sphère), je cherche un triangle rectangle et j'applique le théorème de Pythagore.

Exercice 4 – Le verre à cocktail *(4 pts)*

a) $V = \dfrac{\pi \times 5^2 \times 10}{3} = \dfrac{250}{3}\pi$ cm³ $\approx 261{,}8$ cm³, soit environ 26,2 cL (car 1 cL = 10 cm³). (0,5 pt valeur exacte + 0,5 pt cL) (1)

b) Le jus forme un petit cône de même sommet, réduction du grand. Sa surface est un disque. $k = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$ (petite hauteur ÷ grande hauteur), donc rayon $= 5 \times 0{,}8 = 4$ cm. (0,5 pt k + 0,5 pt nature et rayon) (1)

c) Volumes $\times k^3$: $\dfrac{250}{3}\pi \times 0{,}8^3 = \dfrac{250}{3}\pi \times 0{,}512 = \dfrac{128}{3}\pi$ cm³ $\approx 134{,}0$ cm³, soit environ 13,4 cL.
Vérification avec le petit cône : $\dfrac{\pi \times 4^2 \times 8}{3} = \dfrac{128}{3}\pi$ cm³. (0,5 pt calcul + 0,5 pt cL) (1)

d) Léa a tort : le volume est multiplié par $k^3 = 0{,}512$, pas par $k = 0{,}8$. Le verre n'est rempli qu'à 51,2 % (vérification : $13{,}4 \div 26{,}2 \approx 0{,}51$), à peine plus de la moitié. (0,5 pt k^3 + 0,5 pt conclusion) (1)

Piège — rempli aux 8 dixièmes de sa hauteur, un verre conique ne contient qu'environ la moitié de son volume : les longueurs sont multipliées par k, les volumes par k^3.

Exercice 5 – Points sur la sphère terrestre *(4 pts)*

a) P et Q ont la même latitude, 40° N : même parallèle. P et R ont la même longitude, 75° O : même méridien. T a une latitude de 0° : il est sur l'équateur. R a une latitude Sud : il est dans l'hémisphère Sud. (0,5 pt pour deux réponses justifiées + 0,5 pt pour les deux autres) (1)

b) P est à 40° au nord de l'équateur et R à 25° au sud : ils sont de part et d'autre, l'écart est $40° + 25° = 65°$. Un méridien est une moitié de grand cercle, donc l'arc vaut $\dfrac{65}{360}$ du grand cercle : $2 \times \pi \times 6\,371 \times \dfrac{65}{360} \approx 7\,228$ km. (0,5 pt écart de 65° + 0,5 pt longueur) (1)

c) C'est la section par le plan parallèle à celui de l'équateur qui passe par P (perpendiculaire à l'axe des pôles). Ce plan ne passe pas par O : ce n'est pas un grand cercle. Soit H le centre du parallèle et M un point du parallèle : le triangle OHM est rectangle en H et $\widehat{OMH} = 40°$ (angles alternes-internes, car (HM) est parallèle au plan de l'équateur). Donc $HM = OM \times \cos 40° = 6\,371 \times \cos 40° \approx 4\,880$ km. (0,5 pt plan et grand cercle + 0,5 pt rayon) (1)

d) P est à 75° à l'ouest de Greenwich et Q à 5° à l'est : l'écart de longitude est $75° + 5° = 80°$. Arc $= 2 \times \pi \times 6\,371 \times \cos 40° \times \dfrac{80}{360} \approx 6\,814$ km. (0,5 pt écart de 80° + 0,5 pt longueur) (1)

Méthode — pour un arc, je calcule d'abord l'écart d'angle : je soustrais si les deux points sont du même côté (même lettre N, S, E ou O), j'additionne s'ils sont de part et d'autre de l'équateur ou du méridien de Greenwich.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).