

Devoir surveillé – Calcul littéral, identités remarquables, équations et inéquations — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs astucieux

(4 pts)

Sans calculatrice et sans poser de multiplication, en utilisant une identité remarquable.

- a) Calcule $1\,003^2$.
- b) Calcule $998 \times 1\,002$.
- c) Calcule $2\,027^2 - 2\,026 \times 2\,028$.
- d) Trouve l'entier positif n tel que $n^2 - 99^2 = 199$.

Exercice 2 – Enquête — toutes les solutions

(4 pts)

On cherche tous les couples d'entiers naturels $(a ; b)$ tels que $a^2 - b^2 = 15$.

- a) Factorise $a^2 - b^2$.
- b) Explique pourquoi $a + b$ est un diviseur positif de 15 et pourquoi $a - b < a + b$.
- c) Trouve tous les couples solutions et justifie qu'il n'y en a pas d'autres.
- d) Vérifie tes solutions.

Exercice 3 – Résolutions exigeantes

(4 pts)

Résous chaque équation ou inéquation.

- a) $(2x + 3)^2 = (x - 6)^2$
- b) $\frac{3x - 1}{4} - \frac{x + 2}{6} \geq \frac{x}{3}$
- c) $(x - 3)^2 < x^2 + 15$
- d) $x^3 = 16x$

Exercice 4 – Problème — le cadre

(4 pts)

Une photo rectangulaire de 20 cm sur 30 cm est entourée d'une bordure de largeur constante x cm, avec $x > 0$. L'ensemble forme un rectangle.

- a) Montre que l'aire totale (photo et bordure) vaut, en cm^2 , $4x^2 + 100x + 600$.
- b) On veut que la bordure ait la même aire que la photo. Montre que x vérifie $x^2 + 25x - 150 = 0$.
- c) Développe $(x - 5)(x + 30)$ et déduis-en la largeur de la bordure.
- d) Le périmètre extérieur du cadre ne doit pas dépasser 140 cm. Quelles largeurs de bordure sont possibles ? La largeur trouvée convient-elle ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin — quatre entiers consécutifs

(4 pts)

On étudie le nombre $P = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$, où n est un entier naturel.

- a) Calcule P pour $n = 1$ puis pour $n = 2$. Que remarques-tu ?
- b) Développe $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$.
- c) On pose $m = n^2 + 3n$. Exprime P en fonction de m , puis démontre que $P = (n^2 + 3n + 1)^2$.
- d) Trouve l'entier naturel n pour lequel $P = 71^2$. On pourra développer $(n-7)(n+10)$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).