

Corrigé et barème – Calcul littéral, identités remarquables, équations et inéquations — niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Calculs astucieux

(4 pts)

- a) $(1\,000 + 3)^2 = 1\,000^2 + 2 \times 1\,000 \times 3 + 3^2 = 1\,000\,000 + 6\,000 + 9 = 1\,006\,009$. (1 pt) (1)
- b) $(1\,000 - 2)(1\,000 + 2) = 1\,000^2 - 2^2 = 1\,000\,000 - 4 = 999\,996$. (1 pt) (1)
- c) Avec $n = 2\,027$: $2\,026 \times 2\,028 = (n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$, donc l'expression vaut $n^2 - (n^2 - 1) = 1$. (1 pt : 0,5 pt pour la forme $(n - 1)(n + 1)$, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- d) $n^2 = 99^2 + 199 = 9\,801 + 199 = 10\,000$. L'équation $n^2 = 10\,000$ a pour solutions 100 et -100 ; n étant positif, $n = 100$. Contrôle : $100^2 - 99^2 = (100 - 99)(100 + 99) = 199$. (1 pt) (1)

Astuce — repérer la forme $(n - 1)(n + 1)$ évite tout calcul : elle vaut toujours $n^2 - 1$, quelle que soit la taille de n .

Exercice 2 – Enquête — toutes les solutions

(4 pts)

- a) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. (0,5 pt) (1)
- b) On a $(a - b)(a + b) = 15$. $a + b$ est un entier naturel non nul (sinon le produit serait nul), donc $a - b = \frac{15}{a + b}$ est un entier positif : $a + b$ divise 15. Si $b = 0$, on aurait $a^2 = 15$, impossible pour un entier ($3^2 = 9$ et $4^2 = 16$) ; donc $b \geq 1$ et $a - b < a + b$. (1 pt) (1)
- c) Les diviseurs positifs de 15 sont 1, 3, 5 et 15. Deux facteurs de produit 15, le premier plus petit que le second : 1×15 ou 3×5 , pas d'autre cas. Premier cas : $a - b = 1$ et $a + b = 15$; $a = b + 1$ donne $2b + 1 = 15$, $b = 7$, $a = 8$. Second cas : $a - b = 3$ et $a + b = 5$; $a = b + 3$ donne $2b + 3 = 5$, $b = 1$, $a = 4$. Les solutions sont (8 ; 7) et (4 ; 1). (2 pts : 0,5 pt pour la liste des cas, 0,5 pt pour l'exhaustivité justifiée, 0,5 pt par couple) (1)
- d) $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$ et $4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$. (0,5 pt) (1)

Méthode — pour trouver toutes les solutions, on transforme l'équation en un produit égal à un nombre connu : la liste finie de ses diviseurs garantit qu'aucun cas n'est oublié.

Exercice 3 – Résolutions exigeantes

(4 pts)

- a) $(2x + 3)^2 - (x - 6)^2 = 0$; avec $a^2 - b^2 : [(2x + 3) - (x - 6)][(2x + 3) + (x - 6)] = (x + 9)(3x - 3) = 0$. Donc $x = -9$ ou $x = 1$. Vérification : pour $x = 1$, $5^2 = (-5)^2 = 25$; pour $x = -9$, $(-15)^2 = (-15)^2 = 225$. (1 pt : 0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour les deux solutions) (1)
- b) On multiplie par 12, nombre positif, le sens est conservé : $3(3x - 1) - 2(x + 2) \geq 4x$; $9x - 3 - 2x - 4 \geq 4x$; $7x - 7 \geq 4x$; $3x \geq 7$; $x \geq \frac{7}{3}$. (1 pt) (1)
- c) $x^2 - 6x + 9 < x^2 + 15$; $-6x < 6$; on divise par -6 en changeant le sens : $x > -1$. (1 pt) (1)
- d) $x^3 - 16x = 0$; $x(x^2 - 16) = 0$; $x(x - 4)(x + 4) = 0$. Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est : $x = 0$, $x = 4$ ou $x = -4$. (1 pt ; 0,5 pt seulement si la solution 0 est perdue par une division par x) (1)

Piège — $(2x + 3)^2 = (x - 6)^2$ ne se ramène pas à $2x + 3 = x - 6$: deux nombres de même carré peuvent être opposés, et la factorisation fait apparaître les deux cas.

Exercice 4 – Problème — le cadre*(4 pts)*

- a) Les dimensions extérieures sont $20 + 2x$ et $30 + 2x$. Aire : $(20 + 2x)(30 + 2x) = 600 + 40x + 60x + 4x^2 = 4x^2 + 100x + 600$. (1 pt) (1)
- b) Aire de la bordure : $4x^2 + 100x + 600 - 600 = 4x^2 + 100x$. Condition : $4x^2 + 100x = 600$, soit $4x^2 + 100x - 600 = 0$; en divisant par 4 : $x^2 + 25x - 150 = 0$. (1 pt) (1)
- c) $(x - 5)(x + 30) = x^2 + 30x - 5x - 150 = x^2 + 25x - 150$. L'équation s'écrit donc $(x - 5)(x + 30) = 0$: $x = 5$ ou $x = -30$. Une largeur est positive, donc $x = 5$ cm. Contrôle : $30 \times 40 = 1\,200 = 2 \times 600$. (1 pt : 0,5 pt pour le développement, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) Périmètre : $2[(20 + 2x) + (30 + 2x)] = 2(50 + 4x) = 100 + 8x$. Condition : $100 + 8x \leq 140$; $8x \leq 40$; $x \leq 5$. Les largeurs possibles vérifient $0 < x \leq 5$; la largeur de 5 cm convient, tout juste (périmètre de 140 cm). (1 pt) (1)

Erreur fréquente — l'aire de la bordure n'est pas « x fois le périmètre de la photo » : ce calcul oublie les quatre coins, d'aire x^2 chacun ; le plus sûr est de retrancher l'aire de la photo à l'aire totale.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — quatre entiers consécutifs*(4 pts)*

- a) $n = 1 : 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$. $n = 2 : 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$. On obtient chaque fois le carré d'un entier. (1 pt) (1)
- b) $n(n + 3) = n^2 + 3n$; $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2$. (0,5 pt) (1)
- c) En regroupant les facteurs : $P = n(n + 3) \times (n + 1)(n + 2) + 1 = m(m + 2) + 1 = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$. Donc $P = (n^2 + 3n + 1)^2$: P est toujours le carré d'un entier. (1,5 pt : 0,5 pt pour $m(m + 2) + 1$, 1 pt pour la reconnaissance de l'identité et la conclusion) (1)
- d) $n^2 + 3n + 1$ est positif, donc $P = 71^2$ équivaut à $n^2 + 3n + 1 = 71$, soit $n^2 + 3n - 70 = 0$. Or $(n - 7)(n + 10) = n^2 + 10n - 7n - 70 = n^2 + 3n - 70$. Donc $n = 7$ ou $n = -10$; n étant un entier naturel, $n = 7$. Contrôle : $7 \times 8 \times 9 \times 10 + 1 = 5\,041 = 71^2$. (1 pt) (1)

Méthode — regrouper les facteurs deux par deux pour faire apparaître une même expression, puis la nommer m , transforme un produit de quatre facteurs en une identité remarquable reconnaissable.