

Devoir surveillé – PGCD, nombres premiers et puissances

— niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

Vrai ou faux ? Justifie sans calculer de grandes valeurs.

- a) « $\frac{9^4 \times 2^6}{6^6}$ est un nombre entier. »
- b) « $8^5 > 4^8$ »
- c) « $1,2 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-4} = 1,5 \times 10^{-3}$ »

Exercice 2 – Calculs longs sans calculatrice

(5 pts)

Détaille toutes les étapes.

- a) Écris $A = \frac{15^3 \times 2^{-2} \times 4^3}{10^2 \times 3^4}$ sous forme de fraction irréductible.
- b) Écris $B = \frac{2\,475}{3\,105}$ sous forme irréductible en décomposant numérateur et dénominateur.
- c) Donne l'écriture scientifique de $C = \frac{0,6 \times 10^{-4} \times 35 \times 10^9}{1,4 \times 10^3}$.
- d) Montre que $D = \frac{3^{-2} + 3^{-3}}{3^{-4}}$ est un nombre entier.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

On cherche tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ avec $a < b$, tels que $a + b = 96$ et $\text{PGCD}(a; b) = 12$.

- a) Justifie qu'on peut écrire $a = 12a'$ et $b = 12b'$, où a' et b' sont des entiers premiers entre eux.
- b) Montre que $a' + b' = 8$.
- c) Trouve tous les couples $(a; b)$ solutions, en justifiant que tu n'en as oublié aucun.
- d) Pour chaque couple trouvé, décompose le produit $a \times b$ en facteurs premiers, avec des puissances.

Exercice 4 – Problème — l'image numérique*(5 pts)*

Une image d'écran mesure 1 920 pixels de large sur 1 080 pixels de haut. Chaque pixel est codé sur 3 octets. Une vidéo affiche 60 images par seconde, sans compression.

- a) On veut découper l'image en carrés de pixels identiques, les plus grands possibles, sans reste. Donne le côté de ces carrés et leur nombre.
- b) Écris le nombre de pixels d'une image comme produit de puissances de nombres premiers, puis en écriture scientifique.
- c) Montre que le nombre d'octets d'une minute de vidéo est $2\,239\,488 \times 10^4$, puis donne son écriture scientifique.
- d) Un disque dur contient 10^{12} octets. Combien de minutes entières de cette vidéo peut-il stocker ? Justifie.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(3 pts)*

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

- a) Montre que $2^{n+2} + 2^n = 5 \times 2^n$, puis que ce nombre est divisible par 5 pour tout n .
- b) Écris tous les diviseurs de 10^2 sous la forme $2^a \times 5^b$. Combien sont-ils ?
- c) Généralise : combien de diviseurs le nombre 10^n possède-t-il ? Justifie.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).