

Corrigé et barème – PGCD, nombres premiers et puissances

— niveau ★★★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Automatismes justifiés

(3 pts)

- a) Vrai : $9^4 = 3^8$ et $6^6 = 2^6 \times 3^6$, donc le quotient vaut $\frac{3^8 \times 2^6}{2^6 \times 3^6} = 3^2 = 9$. (0,5 pt pour les décompositions, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- b) Faux : $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$ et $4^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$; comme $2^{15} < 2^{16}$, on a $8^5 < 4^8$. (0,5 pt pour l'écriture en base 2, 0,5 pt pour la comparaison) (1)
- c) Vrai : $3 \times 10^{-4} = 0,3 \times 10^{-3}$, donc la somme vaut $(1,2 + 0,3) \times 10^{-3} = 1,5 \times 10^{-3}$. (0,5 pt pour la mise à la même puissance, 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Astuce — pour comparer des puissances de bases différentes, on cherche une base commune (ici 2) : il suffit alors de comparer les exposants.

Exercice 2 – Calculs longs sans calculatrice

(5 pts)

- a) $15^3 = 3^3 \times 5^3$, $4^3 = 2^6$, $10^2 = 2^2 \times 5^2$. Numérateur : $3^3 \times 5^3 \times 2^{-2} \times 2^6 = 2^4 \times 3^3 \times 5^3$.
Dénominateur : $2^2 \times 3^4 \times 5^2$. $A = 2^2 \times 3^{-1} \times 5 = \frac{20}{3}$, irréductible car $20 = 2^2 \times 5$ n'a pas le facteur 3. (0,5 pt pour les décompositions, 0,5 pt pour les exposants, 0,5 pt pour le résultat) (1,25)
- b) $2\,475 = 5^2 \times 99 = 3^2 \times 5^2 \times 11$ et $3\,105 = 5 \times 621 = 5 \times 27 \times 23 = 3^3 \times 5 \times 23$. PGCD = $3^2 \times 5 = 45$, donc $B = \frac{2\,475 \div 45}{3\,105 \div 45} = \frac{55}{69}$, irréductible car $55 = 5 \times 11$ et $69 = 3 \times 23$ n'ont aucun facteur premier commun. (0,5 pt par décomposition, 0,5 pt pour la fraction irréductible) (1,25)
- c) $0,6 \times 35 = 21$ et $\frac{21}{1,4} = \frac{210}{14} = 15$; $10^{-4+9-3} = 10^2$. Donc $C = 15 \times 10^2 = 1,5 \times 10^3$. (0,5 pt pour la partie décimale, 0,5 pt pour l'écriture scientifique) (1,25)
- d) On divise chaque terme du numérateur par 3^{-4} : $\frac{3^{-2}}{3^{-4}} = 3^2 = 9$ et $\frac{3^{-3}}{3^{-4}} = 3^1 = 3$. Donc $D = 9 + 3 = 12$, qui est entier. (0,5 pt pour la séparation des termes, 0,5 pt pour le résultat) (1,25)

Méthode — tout réécrire en facteurs premiers avant de calculer : les exposants se compensent, et les grands nombres n'apparaissent jamais.

Exercice 3 – Recherche — toutes les solutions

(4 pts)

- a) 12 divise a et b , donc $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec a', b' entiers. Si a' et b' avaient un diviseur commun $d > 1$, alors $12d$ diviserait a et b , et le PGCD serait au moins $12d > 12$: impossible. Donc a' et b' sont premiers entre eux. (0,5 pt pour l'écriture, 0,5 pt pour l'argument par l'absurde) (1)
- b) $12a' + 12b' = 96$, donc $12(a' + b') = 96$ et $a' + b' = 96 \div 12 = 8$. (0,5 pt) (1)
- c) $a < b$ donne $a' < b'$, donc $a' < 4$: $a' \in \{1; 2; 3\}$ (et $a' \geq 1$ car PGCD(0; 96) = 96). $a' = 1, b' = 7$: premiers entre eux, retenu. $a' = 2, b' = 6$: diviseur commun 2, rejeté (le PGCD vaudrait 24). $a' = 3, b' = 5$: premiers entre eux, retenu. Les solutions sont (12; 84) et (36; 60). (0,5 pt pour la liste exhaustive des cas, 0,5 pt pour le rejet de (2; 6), 0,5 pt pour les deux couples) (1)
- d) $12 \times 84 = 1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$ (car $12 = 2^2 \times 3$ et $84 = 2^2 \times 3 \times 7$). $36 \times 60 = 2\,160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$ (car $36 = 2^2 \times 3^2$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$). (0,5 pt par produit) (1)

Piège — $a' + b' = 8$ ne suffit pas : le couple (2; 6) donne $a + b = 96$ mais un PGCD de 24, il faut vérifier la condition « premiers entre eux » pour chaque cas.

Exercice 4 – Problème — l'image numérique**(5 pts)**

- a) $1\,920 = 2^7 \times 3 \times 5$ et $1\,080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$; le côté est $\text{PGCD} = 2^3 \times 3 \times 5 = 120$ pixels. Il y a $1\,920 \div 120 = 16$ carrés en largeur et $1\,080 \div 120 = 9$ en hauteur, soit $16 \times 9 = 144$ carrés. (0,5 pt pour les décompositions, 0,5 pt pour le côté, 0,5 pt pour le nombre de carrés) (1,25)
- b) $1\,920 \times 1\,080 = 2^7 \times 3 \times 5 \times 2^3 \times 3^3 \times 5 = 2^{10} \times 3^4 \times 5^2 = 1\,024 \times 2\,025 = 2\,073\,600 = 2,073\,6 \times 10^6$ pixels. (0,5 pt pour la décomposition, 0,5 pt pour l'écriture scientifique) (1,25)
- c) Une minute compte $60 \times 60 = 3\,600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ images. Nombre d'octets : $2^{10} \times 3^4 \times 5^2 \times 3 \times 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 2^{14} \times 3^7 \times 5^4 = 2^{10} \times 3^7 \times (2 \times 5)^4 = 1\,024 \times 2\,187 \times 10^4 = 2\,239\,488 \times 10^4$, soit $2,239\,488 \times 10^{10}$ octets. (0,5 pt pour le regroupement des puissances, 0,5 pt pour l'écriture scientifique) (1,25)
- d) Il faut comparer $10^{12} = 100 \times 10^{10}$ à $n \times 2,239\,488 \times 10^{10}$. Or $44 \times 2,239\,488 < 44 \times 2,25 = 99 < 100$ et $45 \times 2,239\,488 > 45 \times 2,23 = 100,35 > 100$. Le disque peut donc stocker 44 minutes entières (environ trois quarts d'heure). (0,5 pt pour la mise à la même puissance de 10, 0,5 pt pour l'encadrement, 0,5 pt pour la conclusion) (1,25)

Astuce — regrouper chaque facteur 2 avec un facteur 5 fabrique des puissances de 10 : le calcul se réduit alors à un produit de deux nombres raisonnables.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(3 pts)**

- a) $2^{n+2} = 2^n \times 2^2 = 4 \times 2^n$, donc $2^{n+2} + 2^n = 4 \times 2^n + 1 \times 2^n = 5 \times 2^n$. C'est 5 multiplié par l'entier 2^n : il est divisible par 5 pour tout n . (0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- b) $10^2 = 2^2 \times 5^2$; un diviseur ne peut contenir que les facteurs 2 et 5, avec $a \in \{0; 1; 2\}$ et $b \in \{0; 1; 2\}$: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Il y en a $3 \times 3 = 9$. (0,5 pt pour la liste, 0,5 pt pour le décompte) (1)
- c) $10^n = 2^n \times 5^n$. Ses diviseurs sont les nombres $2^a \times 5^b$ avec a entier de 0 à n ($n + 1$ choix) et b entier de 0 à n ($n + 1$ choix), chaque choix donnant un diviseur différent. Il y a donc $(n + 1) \times (n + 1) = (n + 1)^2$ diviseurs ; on retrouve $9 = 3^2$ pour $n = 2$. (0,5 pt pour la forme des diviseurs, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Erreur fréquente — oublier l'exposant 0 quand on compte les diviseurs : $1 = 2^0 \times 5^0$ est un diviseur, c'est pourquoi chaque exposant offre $n + 1$ choix et non n .