

Corrigé et barème – PGCD, nombres premiers et puissances

— niveau ★★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Vrai : $2^{10} = 2^3 \times 2^7 = 8 \times 2^7$, et 2^7 est un entier. (0,5 pt pour la décomposition, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- b) Vrai : $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6$. (0,5 pt pour la factorisation, 0,5 pt pour la règle des exposants) (1)
- c) Vrai : $10^6 - 1 = 999\,999$; la somme de ses chiffres est $6 \times 9 = 54$, multiple de 9, donc 999 999 est divisible par 9 (quotient 111 111). (0,5 pt pour l'écriture du nombre, 0,5 pt pour le critère) (1)
- d) Faux : $\frac{2^4}{2^{-2}} = 2^{4-(-2)} = 2^6 = 64$; soustraire un exposant négatif revient à ajouter. (0,5 pt pour « faux », 0,5 pt pour le calcul) (1)

Erreur fréquente — confondre 3×3^5 et $3^5 \times 3^5$: ajouter trois fois la même puissance, c'est la multiplier par 3, donc augmenter l'exposant de 1 seulement.

Exercice 2 – Calculs en cascade

(4 pts)

- a) $A = 2^{3-5} \times 3^{2-1} = 2^{-2} \times 3 = \frac{3}{4}$. (0,5 pt pour les exposants, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- b) $B = \frac{36}{4} \times 10^{-3-(-5)} = 9 \times 10^2 = 900$. (0,5 pt pour $\frac{36}{4} = 9$, 0,5 pt pour la puissance de 10) (1)
- c) $294 = 2 \times 3 \times 7^2$ et $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$; PGCD = $2 \times 3 \times 7 = 42$; $C = \frac{294 \div 42}{420 \div 42} = \frac{7}{10}$. (0,5 pt pour les décompositions, 0,5 pt pour la fraction irréductible) (1)
- d) $5^{-1} + 5^0 = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$ et diviser par $5^{-2} = \frac{1}{25}$ revient à multiplier par 25 : $D = \frac{6}{5} \times 25 = 30$. (0,5 pt pour le numérateur, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Méthode — dans un quotient de puissances, on regroupe les puissances d'une même base et on soustrait les exposants ; les nombres ordinaires se traitent à part.

Exercice 3 – Enquête sur un nombre

(4 pts)

- a) $N = 16 \times 9 \times 5 = 144 \times 5 = 720$. (0,5 pt) (1)
- b) $12 = 2^2 \times 3$ figure dans la décomposition de N : N est divisible par 12 ($720 \div 12 = 60$). $25 = 5^2$ mais N ne contient qu'un seul facteur 5 : N n'est pas divisible par 25. (0,5 pt par réponse justifiée) (1)
- c) $N \times 10^{-5} = 720 \times 10^{-5} = 7,2 \times 10^2 \times 10^{-5} = 7,2 \times 10^{-3}$. (0,5 pt pour $720 = 7,2 \times 10^2$, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- d) Un carré a tous ses exposants pairs dans sa décomposition. Ceux de 2 et de 3 le sont déjà ; celui de 5 vaut 1 : il faut multiplier par 5. Donc $k = 5$ et $N \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = (2^2 \times 3 \times 5)^2 = 60^2 = 3\,600$. (0,5 pt pour l'argument des exposants pairs, 0,5 pt pour $k = 5$, 0,5 pt pour 60^2) (1)

Astuce — la décomposition en facteurs premiers répond à presque toutes les questions sur un nombre : divisibilité, diviseurs, carré parfait.

Exercice 4 – Corriger une copie*(4 pts)*

- a) $\text{PGCD} = 2^2 \times 5 = 20$: on prend les facteurs communs avec le **plus petit** exposant ; l'élève a pris le plus grand, ce qui donne 200, qui ne divise même pas 40. (0,5 pt pour le résultat, 0,5 pt pour l'explication) (1)
- b) $4^3 \times 4^2 = 4^5 = 1\,024$: on additionne les exposants mais on garde la base ; l'élève a multiplié les bases. (0,5 pt pour le résultat, 0,5 pt pour l'explication) (1)
- c) L'égalité $0,048 = 48 \times 10^{-3}$ est juste, mais ce n'est pas une écriture scientifique car 48 n'est pas compris entre 1 et 10 : il faut écrire $4,8 \times 10^{-2}$. (0,5 pt pour le résultat, 0,5 pt pour l'explication) (1)
- d) $35 = 5 \times 7$ et $77 = 7 \times 11$ ont le diviseur commun 7 : $\frac{35}{77} = \frac{5}{11}$. Deux nombres impairs peuvent avoir un diviseur commun autre que 1. (0,5 pt pour le résultat, 0,5 pt pour l'explication) (1)

Piège — une écriture scientifique exige un nombre entre 1 et 10 (10 exclu) devant la puissance de 10 ; une égalité juste n'est pas forcément la forme demandée.

Exercice 5 – Problème — les sachets de perles*(4 pts)*

- a) $336 = 252 \times 1 + 84$; $252 = 84 \times 3 + 0$. Le dernier reste non nul est 84 : $\text{PGCD}(336 ; 252) = 84$. (0,5 pt pour les divisions, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- b) Le nombre de sachets divise 336 et 252 ; le plus grand possible est le PGCD : 84 sachets. Chacun contient $336 \div 84 = 4$ perles de verre et $252 \div 84 = 3$ perles de bois. (0,5 pt pour le nombre de sachets, 0,5 pt pour la composition) (1)
- c) $4 \times 0,25 = 1$ g et $3 \times 0,08 = 0,24$ g ; un sachet pèse $1 + 0,24 = 1,24$ g. (0,5 pt pour les conversions en décimal, 0,5 pt pour le total) (1)
- d) $84 \times 1,24 = 84 + 84 \times 0,24 = 84 + 20,16 = 104,16$ g. En kilogrammes : $0,104\,16$ kg = $1,041\,6 \times 10^{-1}$ kg. (0,5 pt pour la masse en grammes, 0,5 pt pour l'écriture scientifique en kg) (1)

Méthode — dans l'algorithme d'Euclide, on divise toujours le diviseur précédent par le reste obtenu ; le PGCD est le dernier reste non nul.