

Corrigé et barème – PGCD, nombres premiers et puissances

— niveau ★

Durée : 55 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) Faux : $91 = 7 \times 13$, donc 91 a d'autres diviseurs que 1 et lui-même. (0,5 pt pour « faux », 0,5 pt pour la décomposition) (1)
- b) Vrai : quand on multiplie deux puissances d'un même nombre, on additionne les exposants : $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ (on peut vérifier : $8 \times 16 = 128 = 2^7$). (1 pt) (1)
- c) Vrai : $2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 72 \times 5 = 360$, et 2, 3, 5 sont premiers. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) Faux : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$; un exposant négatif donne un inverse, pas un nombre négatif. (0,5 pt pour le calcul, 0,5 pt pour l'explication) (1)

Piège — un nombre impair qui ne se termine pas par 5 n'est pas forcément premier : il faut tester les diviseurs premiers 3, 7, 11... tant que leur carré ne dépasse pas le nombre.

Exercice 2 – Calculs de puissances

(4 pts)

- a) $A = 25 + 16 = 41$. (0,5 pt pour les deux puissances, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- b) $(-1)^7 = -1$ car l'exposant 7 est impair ; $B = -1 \times 16 = -16$. (0,5 pt pour le signe, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- c) $C = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. (1 pt) (1)
- d) $6^0 = 1$ et $6^1 = 6$, donc $D = 1 + 6 = 7$. (0,5 pt pour $6^0 = 1$, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Erreur fréquente — écrire $6^0 = 0$: toute puissance d'exposant 0 d'un nombre non nul vaut 1, et 6^1 vaut le nombre lui-même.

Exercice 3 – Décomposer pour simplifier

(4 pts)

- a) $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$. (0,5 pt pour les divisions successives, 0,5 pt pour l'écriture finale) (1)
- b) $126 = 2 \times 63 = 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 3^2 \times 7$. (0,5 pt pour les divisions successives, 0,5 pt pour l'écriture finale) (1)
- c) On garde les facteurs communs avec le plus petit exposant : $\text{PGCD}(84 ; 126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. (0,5 pt pour la méthode, 0,5 pt pour le résultat) (1)
- d) $\frac{84}{126} = \frac{2 \times 42}{3 \times 42} = \frac{2}{3}$; 2 et 3 sont premiers entre eux, la fraction est irréductible. (0,5 pt pour la simplification par 42, 0,5 pt pour la justification) (1)

Méthode — diviser une fraction en haut et en bas par le PGCD donne directement la fraction irréductible, en une seule étape.

Exercice 4 – Puissances de 10 et diviseurs*(4 pts)*

- a) $52\,000 = 5,2 \times 10\,000 = 5,2 \times 10^4$. (1 pt) (1)
b) $0,0091 = 9,1 \times 0,001 = 9,1 \times 10^{-3}$. (1 pt) (1)
c) $10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$. (0,5 pt pour $10 = 2 \times 5$, 0,5 pt pour le résultat) (1)
d) $8 = 2^3$ et $125 = 5^3$ apparaissent dans la décomposition, donc 10^3 est divisible par les deux : $1\,000 \div 8 = 125$ et $1\,000 \div 125 = 8$. (0,5 pt par division justifiée) (1)

Astuce — $10^n = 2^n \times 5^n$: cette décomposition donne d'un coup tous les diviseurs d'une puissance de 10.

Exercice 5 – Problème — les bouquets*(4 pts)*

- a) $96 = 2^5 \times 3$ (car $96 = 32 \times 3$) et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. (0,5 pt par décomposition) (1)
b) Le nombre de bouquets doit diviser 96 et 60 ; le plus grand est $\text{PGCD}(96 ; 60) = 2^2 \times 3 = 12$. Il peut composer 12 bouquets. (0,5 pt pour l'argument du diviseur commun, 0,5 pt pour le résultat) (1)
c) $96 \div 12 = 8$ et $60 \div 12 = 5$: chaque bouquet contient 8 roses et 5 tulipes. (0,5 pt par quotient) (1)
d) $3\text{ mm} = 3 \times 10^{-3}\text{ m}$; $\frac{3 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-5}} = 10^{-3-(-5)} = 10^2 = 100$. Il faut aligner environ 100 grains. (0,5 pt pour la conversion, 0,5 pt pour le quotient) (1)

Piège — avant de diviser deux longueurs, il faut les exprimer dans la même unité ; sinon l'exposant final est faux de 3 ou de 6.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).