

Arithmétique : PGCD et nombres premiers

Reconnaître un nombre premier, décomposer un entier, trouver un PGCD et rendre une fraction irréductible.

1 Définitions

- **Diviseur** de a : la division de a par ce nombre a un reste nul ($a = b \times k$).
- **Nombre premier** : exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. 1 n'est pas premier ; 2 est le seul premier pair.
- **PGCD**(a ; b) : le plus grand diviseur commun à a et b .
- **Premiers entre eux** : PGCD = 1. **Fraction irréductible** : numérateur et dénominateur premiers entre eux.

2 Critères de divisibilité

- Par 2 : unités 0, 2, 4, 6, 8. Par 5 : unités 0 ou 5. Par 10 : unités 0.
- Par 3 : somme des chiffres multiple de 3. Par 9 : somme des chiffres multiple de 9.
- Par 4 : les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Premiers jusqu'à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

3 Méthode : décomposer

1. Diviser par 2 tant que possible, puis par 3, 5, 7, 11...
2. S'arrêter à 1 ; écrire le produit avec des exposants : $260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.
3. Tester « premier ? » : essayer les premiers jusqu'à ce que leur carré dépasse le nombre.

4 Méthode : PGCD

- **Par décomposition** : facteurs communs, chacun avec le **plus petit** exposant.
- **Euclide** : $a = b \times q + r$, puis recommencer avec b et r ; le PGCD est le **dernier reste non nul**. Ex. : $1\,071 = 462 \times 2 + 147$; $462 = 147 \times 3 + 21$; $147 = 21 \times 7 \rightarrow$ PGCD = 21.
- Si b divise a , PGCD(a ; b) = b . Deux entiers consécutifs : PGCD = 1.
- Problèmes « lots identiques, tout utiliser, le plus possible » $\rightarrow$ PGCD.

5 Pièges à éviter

- Croire que 51, 87, 91 ou 221 sont premiers (3×17 , 3×29 , 7×13 , 13×17).
- Écrire 4×15 comme « décomposition » : tous les facteurs doivent être premiers.
- Prendre le plus grand exposant pour le PGCD (c'est le plus petit).
- Confondre PGCD (partager) et multiple commun (se retrouver).
- Oublier que « divisible par 4 et 6 » ne donne pas « divisible par 24 ».

L'ESSENTIEL

- Nombre premier : exactement deux diviseurs ; 1 n'est pas premier.
- Tout entier ≥ 2 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.
- PGCD : facteurs communs avec le plus petit exposant, ou dernier reste non nul d'Euclide.

- Fraction irréductible : diviser haut et bas par le PGCD.
- Lots identiques en utilisant tout $\rightarrow$ PGCD ; rendez-vous périodiques $\rightarrow$ multiple commun.