

Corrigé et barème – Arithmétique : PGCD et nombres premiers

Diviseurs, nombres premiers, décomposition, PGCD par soustractions, par divisions (Euclide) et par décomposition, fractions irréductibles (programme de 3e)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Exercice 1 – Diviseurs, critères et nombres premiers

(4 pts)

- a) $4 + 7 + 2 + 5 = 18$: divisible par 3 et par 9 ; se termine par 5 : divisible par 5. (1)
- b) Par paires : $1 \times 45, 3 \times 15, 5 \times 9$; diviseurs : 1, 3, 5, 9, 15, 45. (1)
- c) Non divisible par 2, 3, 5, 7, 11 ; $221 = 13 \times 17$, donc 221 n'est pas premier (on aurait pu s'arrêter à 13 car $17^2 = 289 > 221$). (1)
- d) 7 et 9 sont premiers entre eux : le nombre est un multiple de 63 ; $63 \times 2 = 126$. (1)

Méthode — pour tester si un nombre est premier, on essaie les nombres premiers dans l'ordre et l'on s'arrête dès que leur carré dépasse le nombre : inutile de tester au-delà.

Exercice 2 – Lecture d'un tableau : décompositions

(4 pts)

- a) $1\,848 \div (8 \times 3 \times 11) = 7$, donc $1\,848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$; $1\,575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$. (1)
- b) Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. (1)
- c) $\frac{1\,260 \div 84}{1\,848 \div 84} = \frac{15}{22}$. (1)
- d) $15 = 3 \times 5$: les deux facteurs sont présents, oui ; $20 = 2^2 \times 5$: il n'y a qu'un seul facteur 2, donc non. (1)

Le point clé — une décomposition contient toute l'information sur les diviseurs d'un nombre : un diviseur est un produit de facteurs pris dans la décomposition, avec des exposants au plus égaux.

Exercice 3 – Les kits de cuisine

(4 pts)

- a) Le nombre de kits doit diviser 1 071 et 462 (tout est utilisé, kits identiques) et être le plus grand possible : c'est le PGCD. (1)
- b) $1\,071 = 462 \times 2 + 147$; $462 = 147 \times 3 + 21$; $147 = 21 \times 7 + 0$; PGCD = 21. (1)
- c) $1\,071 \div 21 = 51$ cuillères et $462 \div 21 = 22$ fourchettes. (1)
- d) Non : $1\,071 \div 42 = 25,5$ n'est pas entier ; 42 ne divise pas 1 071 (un diviseur commun doit diviser le PGCD 21). (1)

Rédaction — avant de calculer, on justifie le choix du PGCD par les deux conditions du problème : tout utiliser (diviseur commun) et le plus grand nombre possible (le plus grand).

Exercice 4 – Vrai ou faux, avec justification

(4 pts)

- a) Faux : PGCD(8 ; 12) = 4. (1)
- b) Vrai : 3 et 4 sont premiers entre eux, la décomposition contient 2^2 et 3, donc 12 divise le nombre. (1)
- c) Faux : 12 est divisible par 4 et par 6 mais pas par 24. (1)
- d) Faux : PGCD(15 ; 21) = 3. (1)

Erreur fréquente — on ne peut « multiplier » deux critères de divisibilité que si les deux diviseurs sont premiers entre eux ; sinon un facteur est compté deux fois.

Exercice 5 – Prise d’initiative — la mosaïque*(4 pts)*

- a) $216 = 2^3 \times 3^3$ et $144 = 2^4 \times 3^2$: $\text{PGCD}(216; 144) = 2^3 \times 3^2 = 72$ cm. (1)
- b) Les diviseurs communs sont les diviseurs de 72 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. (1)
- c) Le plus grand diviseur inférieur ou égal à 30 : 24 cm ; $216 \div 24 = 9$ et $144 \div 24 = 6$, soit 54 carreaux. (1)
- d) $54 \times 1,35 = 72,90$ €. (1)

Astuce — les diviseurs communs de deux nombres sont exactement les diviseurs de leur PGCD : une fois le PGCD trouvé, toutes les tailles possibles s’en déduisent.