

Devoir surveillé – Arithmétique : PGCD et nombres premiers

Diviseurs, nombres premiers, décomposition, PGCD par soustractions, par divisions (Euclide) et par décomposition, fractions irréductibles (programme de 3e)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 3^e

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Diviseurs, critères et nombres premiers (4 pts)

- Le nombre 4 725 est-il divisible par 3 ? par 5 ? par 9 ? Justifie chaque réponse avec un critère.
- Dresse la liste de tous les diviseurs de 45 en expliquant comment ne pas en oublier.
- Le nombre 221 est-il premier ? Justifie en indiquant les tests effectués et le moment où l'on peut s'arrêter.
- Quel est le plus petit nombre entier à trois chiffres divisible à la fois par 7 et par 9 ? Justifie.

Exercice 2 – Lecture d'un tableau : décompositions (4 pts)

Le tableau donne la décomposition en facteurs premiers de quatre nombres ; deux cases sont à compléter.

Nombre	Décomposition
1 260	$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
1 848	$2^3 \times 3 \times ? \times 11$
2 310	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$
1 575	?

- Retrouve le facteur manquant de 1 848 et écris la décomposition complète de 1 575.
- Calcule PGCD(1 260 ; 1 848) à l'aide des décompositions.
- Écris la fraction $\frac{1\,260}{1\,848}$ sous forme irréductible.
- Sans poser de division, dis si 2 310 est divisible par 15, puis par 20. Justifie.

Exercice 3 – Les kits de cuisine (4 pts)

Une association a récupéré 1 071 cuillères et 462 fourchettes. Elle veut constituer des kits identiques, en utilisant tous les couverts, avec le plus grand nombre de kits possible.

- Explique pourquoi le nombre de kits cherché est le PGCD de 1 071 et 462.
- Calcule ce PGCD avec l'algorithme d'Euclide en écrivant chaque division.
- Combien de cuillères et de fourchettes contient chaque kit ?
- Un bénévole propose de faire 42 kits identiques à la place. Est-ce possible ? Justifie.

Exercice 4 – Vrai ou faux, avec justification*(4 pts)*

Indique si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifie par un exemple, un contre-exemple ou une propriété.

- a) « Le PGCD de deux nombres pairs est toujours égal à 2. »
- b) « Si un nombre est divisible par 3 et par 4, alors il est divisible par 12. »
- c) « Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24. »
- d) « Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux. »

Exercice 5 – Prise d'initiative — la mosaïque*(4 pts)*

Un carreleur doit recouvrir un mur rectangulaire de 2,16 m sur 1,44 m avec des carreaux carrés identiques, sans découpe. Le côté d'un carreau est un nombre entier de centimètres et, pour des raisons esthétiques, ne doit pas dépasser 30 cm. Un carreau coûte 1,35 €.

- a) Quelle est la plus grande taille de carreau possible si l'on ignore la contrainte des 30 cm ? Justifie.
- b) Dresse la liste de toutes les tailles de carreaux possibles (en cm).
- c) Quelle taille le carreleur doit-il choisir pour utiliser le moins de carreaux possible en respectant la contrainte ? Combien de carreaux faut-il ?
- d) Calcule le coût des carreaux. Toute trace de recherche sera prise en compte.

Bon courage !