

Arithmétique : PGCD et nombres premiers

Barème : 1 point par question, soit 4 points par exercice

Unités : réponse sans unité = 0,5 point retiré

1 Diviseurs, critères et nombres premiers

/ 4 pts

- a. $4+7+2+5 = 18$: divisible par 3 et par 9 ; se termine par 5 : divisible par 5.
- b. Par paires : 1×45 , 3×15 , 5×9 ; diviseurs : 1, 3, 5, 9, 15, 45.
- c. Non divisible par 2, 3, 5, 7, 11 ; $221 = 13 \times 17$, donc 221 n'est pas premier (on aurait pu s'arrêter à 13 car $17^2 = 289 > 221$).
- d. 7 et 9 sont premiers entre eux : le nombre est un multiple de 63 ; $63 \times 2 = 126$.

Méthode — pour tester si un nombre est premier, on essaie les nombres premiers dans l'ordre et l'on s'arrête dès que leur carré dépasse le nombre : inutile de tester au-delà.

2 Lecture d'un tableau : décompositions

/ 4 pts

- a. $1\ 848 \div (8 \times 3 \times 11) = 7$, donc $1\ 848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$; $1\ 575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$.
- b. Facteurs communs avec le plus petit exposant : $2^2 \times 3 \times 7 = 84$.
- c. $\frac{1\ 260 \div 84}{1\ 848 \div 84} = \frac{15}{22}$.
- d. $15 = 3 \times 5$: les deux facteurs sont présents, oui ; $20 = 2^2 \times 5$: il n'y a qu'un seul facteur 2, donc non.

Le point clé — une décomposition contient toute l'information sur les diviseurs d'un nombre : un diviseur est un produit de facteurs pris dans la décomposition, avec des exposants au plus égaux.

3 Les kits de cuisine

/ 4 pts

- a. Le nombre de kits doit diviser 1 071 et 462 (tout est utilisé, kits identiques) et être le plus grand possible : c'est le PGCD.
- b. $1\ 071 = 462 \times 2 + 147$; $462 = 147 \times 3 + 21$; $147 = 21 \times 7 + 0$; PGCD = 21.
- c. $1\ 071 \div 21 = 51$ cuillères et $462 \div 21 = 22$ fourchettes.
- d. Non : $1\ 071 \div 42 = 25,5$ n'est pas entier ; 42 ne divise pas 1 071 (un diviseur commun doit diviser le PGCD 21).

Rédaction — avant de calculer, on justifie le choix du PGCD par les deux conditions du problème : tout utiliser (diviseur commun) et le plus grand nombre possible (le plus grand).

4 Vrai ou faux, avec justification

/ 4 pts

- a. Faux : PGCD(8 ; 12) = 4.
- b. Vrai : 3 et 4 sont premiers entre eux, la décomposition contient 2^2 et 3, donc 12 divise le nombre.
- c. Faux : 12 est divisible par 4 et par 6 mais pas par 24.
- d. Faux : PGCD(15 ; 21) = 3.

Erreur fréquente — on ne peut « multiplier » deux critères de divisibilité que si les deux diviseurs sont premiers entre eux ; sinon un facteur est compté deux fois.

5 Prise d'initiative — la mosaïque

/ 4 pts

- a. $216 = 2^3 \times 3^3$ et $144 = 2^4 \times 3^2$: $\text{PGCD}(216 ; 144) = 2^3 \times 3^2 = 72$ cm.
- b. Les diviseurs communs sont les diviseurs de 72 : **1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72**.
- c. Le plus grand diviseur inférieur ou égal à 30 : **24** cm ; $216 \div 24 = 9$ et $144 \div 24 = 6$, soit **54** carreaux.
- d. $54 \times 1,35 = 72,90$ €.

Astuce — les diviseurs communs de deux nombres sont exactement les diviseurs de leur PGCD : une fois le PGCD trouvé, toutes les tailles possibles s'en déduisent.