

Vecteurs

L'essentiel sur une page

Les vecteurs traduisent les déplacements du plan en calculs : savoir calculer des coordonnées, une norme, tester une colinéarité et démontrer avec la relation de Chasles.

1 Définitions

- **Vecteur $\overrightarrow{AB}$** : caractérise la translation qui transforme A en B ; direction (droite (AB)), sens (de A vers B), norme (longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$).
- **Égalité** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- **Vecteur nul** $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; **opposé** : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- **Milieu** : I milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.
- **Colinéaires** : $\vec{v} = k \vec{u}$ pour un réel k (même direction) ; le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

2 Opérations

- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si ABCD est un parallélogramme.
- **Différence** : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- **Produit k $\vec{u}$** : même direction, même sens si $k > 0$, sens contraire si $k < 0$, norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.
- On calcule comme avec des lettres : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; jamais de produit de deux vecteurs.

3 Formules en coordonnées

- $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$: « extrémité moins origine ».
- $\vec{u} (x ; y)$ et $\vec{v} (x' ; y')$: $\vec{u} + \vec{v} (x + x' ; y + y')$; $k \vec{u} (kx ; ky)$.
- Milieu de [AB] : $((x_A + x_B)/2 ; (y_A + y_B)/2)$.
- Base **orthonormée** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- **Déterminant** : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det = 0$.

4 Méthodes

1. **Parallélogramme ABCD** : vérifier $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (mêmes coordonnées) ou que les diagonales ont le même milieu.
2. **Points alignés / droites parallèles** : calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (ou $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$) ; nul $\Rightarrow$ alignés (parallèles).
3. **Point défini par une égalité** : poser $M(x ; y)$, traduire l'égalité par deux équations, résoudre.
4. **Décomposer $\vec{w}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$** : vérifier $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, puis résoudre le système $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$; le couple (a ; b) est unique.
5. **Démonstration sans coordonnées** : insérer un point avec Chasles, exprimer tout dans une base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ de la figure.

5 Pièges

- Ne pas confondre point et vecteur : $\overrightarrow{AB} (3 ; 4)$ ne donne pas B(3 ; 4).
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ en général.
- Déterminant nul = colinéaires, pas égaux ; il ne donne pas k.
- La formule de la norme exige une base orthonormée.
- ABCD parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et non $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

L'ESSENTIEL

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, pour tous points A, B, C.
- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$; en base orthonormée $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $\vec{u} (x ; y)$ et $\vec{v} (x' ; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
- Trois points sont alignés si et seulement si deux vecteurs qu'ils définissent sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur s'écrit de manière unique $a\vec{u} + b\vec{v}$.