

Devoir surveillé – Vecteurs

Définition, opérations et applications des vecteurs du plan — programme de 2^{nde} générale

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs en coordonnées

(4 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. $A(-3 ; 4)$, $B(2 ; -2)$ et $C(5 ; 3)$.

- a) Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$.
- b) Calculer les coordonnées de $\vec{AB} - 2\vec{AC}$.
- c) Calculer la longueur AB (valeur exacte).
- d) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\vec{CM} = \vec{AB}$.

Exercice 2 – Relation de Chasles et démonstrations

(4 pts)

- a) Simplifier $\vec{AB} + \vec{CA} - \vec{CB}$ en justifiant.
- b) Soit I le milieu de [AB]. Démontrer que pour tout point M, $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.
- c) ABCD est un parallélogramme de centre O. Que vaut $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$? Justifier.
- d) Un élève écrit « $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD}$ ». Expliquer pourquoi c'est faux en général et à quelle condition sur les points c'est vrai.

Exercice 3 – Colinéarité et alignement

(4 pts)

Le plan est muni d'un repère. $A(1 ; -1)$, $B(4 ; 1)$ et $C(11 ; 5)$.

- a) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
- b) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
- c) Déterminer le réel t pour que $\vec{p}\begin{pmatrix} 2t+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{q}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.
- d) Déterminer le réel y pour que le point $E(-5 ; y)$ appartienne à la droite (AB).

Exercice 4 – Parallélogramme et alignement

(4 pts)

Dans un repère orthonormé, $A(2 ; 3)$, $B(7 ; 5)$ et $C(6 ; -1)$.

- a) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
- b) Calculer les coordonnées du centre O de ce parallélogramme.
- c) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$.
- d) Montrer que les points D, C et E sont alignés.

Exercice 5 – Décomposition et vrai/faux*(4 pts)*

Dans un repère, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.
- b) Déterminer les réels a et b tels que $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- c) Vrai ou faux, avec justification : « si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ ».
- d) Vrai ou faux, avec justification : « si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{w}$ ».

Bon courage !