

Corrigé et barème – Vecteurs

Définition, opérations et applications des vecteurs du plan — programme de 2^{nde} générale

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Calculs en coordonnées

(4 pts)

- a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2+3 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. (1)
- b) $2\vec{AC} \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} - 2\vec{AC} \begin{pmatrix} 5-16 \\ -6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \end{pmatrix}$. (1)
- c) $AB = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ (repère orthonormé). (1)
- d) $M(5+5; 3-6)$, soit $M(10; -3)$. (1)

Erreur fréquente — Les coordonnées d'un vecteur se calculent « extrémité moins origine » ; pour trouver un point, on ajoute le vecteur aux coordonnées du point de départ.

Exercice 2 – Relation de Chasles et démonstrations

(4 pts)

- a) $-\vec{CB} = \vec{BC}$; $\vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{CC} = \vec{0}$. (1)
- b) $\vec{MA} = \vec{MI} + \vec{IA}$ et $\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IB}$; comme $\vec{IA} = -\vec{IB}$, la somme vaut $2\vec{MI}$. (1)
- c) O est le milieu de [AC] et de [BD] : $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ et $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$, donc la somme est $\vec{0}$. (1)
- d) Chasles exige que l'extrémité du premier soit l'origine du second. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} \iff \vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD} \iff C = B$. (1)

Le point clé — Une démonstration vectorielle commence presque toujours par insérer un point bien choisi avec la relation de Chasles.

Exercice 3 – Colinéarité et alignement

(4 pts)

- a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-2, 5) \times (-16) - 4 \times 10 = 40 - 40 = 0$: colinéaires ($\vec{v} = -4\vec{u}$). (1)
- b) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\det = 3 \times 6 - 2 \times 10 = -2 \neq 0$: non alignés. (1)
- c) $(2t+1)(-2) - 3 \times 5 = 0 \iff -4t - 2 - 15 = 0 \iff t = -\frac{17}{4}$. (1)
- d) $\vec{AE} \begin{pmatrix} -6 \\ y+1 \end{pmatrix}$; $3(y+1) - 2 \times (-6) = 0 \iff 3y + 15 = 0 \iff y = -5$. (1)

Attention — Des points qui « ont l'air » alignés ne le sont pas toujours : seul le déterminant nul le prouve.

Exercice 4 – Parallélogramme et alignement

(4 pts)

- a) $\vec{AD} = \vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$, donc $D(1; -3)$. Contrôle : $\vec{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{AB}$. (1)
- b) O est le milieu de [AC] : $O \left(\frac{2+6}{2}; \frac{3-1}{2} \right) = (4; 1)$. (1)
- c) $\frac{1}{2}\vec{AB} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, somme $\begin{pmatrix} 6,5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $E(8,5; 0)$. (1)
- d) $\vec{DC} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{DE} \begin{pmatrix} 7,5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\det = 5 \times 3 - 2 \times 7,5 = 0$: D, C, E alignés. (1)

Repère — Pour ABCD, l'égalité utile est $\vec{AD} = \vec{BC}$ ou $\vec{AB} = \vec{DC}$; dessiner la figure évite d'inverser le sens.

Exercice 5 – Décomposition et vrai/faux*(4 pts)*

- a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 2 - (-1) \times 1 = 7 \neq 0$: non colinéaires, donc base. (1)
- b) $\begin{pmatrix} 3a+b \\ -a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$; $b = -1 - 3a$ puis $-7a - 2 = 12$: $a = -2$, $b = 5$. (1)
- c) Faux : $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ont la même norme 5 et sont différents. (1)
- d) Faux si $\vec{v} = \vec{0}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont tous deux colinéaires à $\vec{0}$ sans l'être entre eux. (Vrai si $\vec{v} \neq \vec{0}$.) (1)

Astuce — Pour réfuter une affirmation générale, un seul contre-exemple chiffré suffit ; pensez au vecteur nul.