Variations et extrémums

Fiche méthode

(Maths 2nde · Fonctions · Variations et extrémums)

La démarche pour étudier les variations d'une fonction

1. Je conjecture le sens de variation : courbe, tableau de valeurs (calculatrice ou Python).

2. Je démontre : signe de $f(b) - f(a)$ pour $a < b$, ou variations connues (affine, carré, inverse, valeur absolue).

3. Je dresse le tableau : bornes et changements de sens en haut, flèches et images en bas.

4. J'exploite : extrémums (bornes comprises), comparaisons dans un même intervalle, encadrements, optimisation.

Le réflexe — une lecture graphique ou un tableau de valeurs ne démontre rien : un sens de variation ou un extrémum se justifie par un calcul ou par une propriété citée.

Cas 1 · Démontrer un sens de variation

Réflexe — je prends a < b dans I, je factorise f(b) − f(a) par b − a, j'étudie le signe de l'autre facteur avec les bornes de I.

Exemple. Questions types : « Démontrer que f est croissante sur I ». Exemple : $s(x) = x^2 - 10x$ sur $]-\infty\,;5]$.

Soient $a < b \leqslant 5$. $s(b) - s(a) = b^2 - a^2 - 10(b-a) = (b-a)(a+b-10)$.

$b - a > 0$ et $a + b < 10$, donc $a + b - 10 < 0$: $s(b) - s(a) < 0$.

s est strictement décroissante sur $]-\infty\,;5]$ (et, de même, croissante sur $[5\,;+\infty[$).

Attention — trois valeurs qui augmentent ne prouvent pas qu'une fonction est croissante.

Cas 2 · Dresser et lire un tableau de variations

Réflexe — bornes et changements de sens sur la 1re ligne, flèches et images sur la 2e ; une flèche = un intervalle de monotonie.

Exemple. Questions types : « Dresser le tableau de variations de f sur $[a\,;b]$ », « Encadrer $f(x)$ ». Exemple : s (cas 1) sur $[2\,;8]$.

$s(2) = 4 - 20 = -16$, $s(5) = 25 - 50 = -25$, $s(8) = 64 - 80 = -16$.

x	2		5		8
$s(x)$	-16	$\searrow$	-25	$\nearrow$	-16

Pour x dans $[2\,;8]$: $-25 \leqslant s(x) \leqslant -16$.

Attention — les nombres du bas sont des images, pas des abscisses.

Cas 3 · Maximum, minimum

Réflexe — je repère le candidat c, je calcule f(c), puis je montre que f(x) − f(c) est négatif (maximum) ou positif (minimum).

Exemple. Questions types : « Montrer que f admet un maximum », « Lire l'extrémum sur $[a\,;b]$ ». Exemple : $t(x) = 7 + 4x - x^2$ sur $\mathbb{R}$.

$t(2) = 7 + 8 - 4 = 11$.

$t(x) - 11 = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2 \leqslant 0$, donc $t(x) \leqslant 11$.

Le maximum de t sur $\mathbb{R}$ est 11, atteint en 2.

Attention — le maximum est une image ; l'abscisse où il est atteint est une autre réponse.

Cas 4 · Comparer deux images

Réflexe — même intervalle de monotonie d'abord ; puis même ordre si croissante, ordre inversé si décroissante.

Exemple. Questions types : « Comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans calcul ». Exemple : comparer $\dfrac{1}{-1{,}2}$ et $\dfrac{1}{-1{,}5}$.

$-1{,}5$ et $-1{,}2$ sont dans $]-\infty\,;0[$, où la fonction inverse est strictement décroissante.
$-1{,}5 < -1{,}2$, donc l'ordre est inversé : $\dfrac{1}{-1{,}5} > \dfrac{1}{-1{,}2}$.

Attention — deux nombres de part et d'autre d'un changement de sens (ou de 0 pour l'inverse) ne se comparent pas par la règle.

Cas 5 · Optimiser

Réflexe — variable et intervalle, grandeur en fonction de x, extrémum démontré, phrase de conclusion avec l'unité.

Exemple. Questions types : « Pour quelle valeur de x l'aire (le bénéfice) est-elle maximale ? ». Exemple : deux nombres positifs ont pour somme 12 ; rendre leur produit maximal.

x dans $[0\,;12]$, l'autre nombre vaut $12-x$: $P(x)=x(12-x)$.
$36-P(x)=x^2-12x+36=(x-6)^2\geqslant 0$, donc $P(x)\leqslant 36=P(6)$.
Le produit est maximal, égal à 36, quand les deux nombres valent 6.

Attention — le candidat doit appartenir à l'intervalle ; sinon l'extrémum est souvent à une borne.

Cas 6 · Balayage et dichotomie

Réflexe — balayage : le sommet est à moins d'un pas de l'abscisse retenue ; dichotomie : f(m) < f(m + h) → on garde [m ; b], sinon [a ; m + h].

Exemple. Questions types : « Encadrer l'abscisse du maximum », « Compléter le programme ». Exemple : $w(x)=2x-x^3$, croissante puis décroissante sur $[0\,;1]$, balayée au pas 0,1.

$w(0{,}7)=1{,}057$, $w(0{,}8)=1{,}088$, $w(0{,}9)=1{,}071$.
La plus grande image calculée est en 0,8.
Le maximum est atteint entre 0,7 et 0,9.

Attention — un algorithme encadre le maximum, il ne donne pas sa valeur exacte.

Les pièges

- Croissante sur [0 ; 2] et sur [5 ; 8] ne veut pas dire croissante sur [0 ; 8].
- f(0) < f(5) ne prouve pas que f est croissante sur [0 ; 5].
- Le maximum se lit sur la 2e ligne du tableau, bornes comprises.
- Prouver f(x) ≤ M ne suffit pas : il faut aussi une image égale à M.
- La fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$: $(-5)^2 > 2^2$ alors que $-5 < 2$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).