Devoir surveillé – Variations et extrémums

Fonction croissante, décroissante, monotone sur un intervalle, tableau de variations, maximum et minimum, comparer f(a) et f(b), problèmes d'optimisation, balayage et dichotomie en Python.

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

Répondre en justifiant brièvement.

a) f est décroissante sur $[-2\,;5]$. Comparer $f(0{,}5)$ et $f(1{,}5)$.

b) Comparer $(-1{,}3)^2$ et $(-1{,}31)^2$.

c) Donner le minimum sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x-7)^2 + 2$ et la valeur où il est atteint.

d) Donner le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 4 - 0{,}5x$.

Exercice 2 – Lire un tableau de variations ★★ *(4 pts)*

La fonction k est définie sur $[-5\,;7]$; son tableau de variations est donné ci-dessous, et k est strictement monotone sur chaque intervalle.

x	-5		-1		3		7
$k(x)$	2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	9	$\searrow$	-4

a) Donner le maximum et le minimum de k sur $[-5\,;7]$, en précisant où ils sont atteints.

b) Comparer $k(4)$ et $k(6)$ en justifiant.

c) Encadrer $k(x)$ pour x dans $[-1\,;3]$.

d) Un élève écrit : « $k(-5) = 2$ et $k(7) = -4$, donc k est décroissante sur $[-5\,;7]$ ». Expliquer son erreur.

Exercice 3 – Démontrer un sens de variation et un extrémum ★★ *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 40$.

a) Soient $a < b$ deux réels. Démontrer que $f(b) - f(a) = (b-a)(a+b-12)$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[6\,;+\infty[$.

c) Démontrer que $f(x) - 4 = (x-6)^2$ pour tout réel x, puis en déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

d) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;10]$ (on admet que f est décroissante sur $]-\infty\,;6]$).

Exercice 4 – Un enclos partagé en deux ★★★ *(4 pts)*

Un éleveur dispose de 120 m de grillage pour un enclos rectangulaire partagé en deux par une clôture intérieure parallèle à deux de ses côtés. On note x la longueur, en m, de chacun des trois segments parallèles (les deux côtés et la séparation), avec $0 < x < 40$, et $A(x)$ l'aire totale de l'enclos en m^2.

a) Exprimer la longueur des deux autres côtés en fonction de x, puis montrer que $A(x) = x(60 - 1{,}5x)$.

b) Démontrer que $A(x) = 600 - 1{,}5(x - 20)^2$ pour tout x de $]0\,;40[$.

c) En déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale et la valeur de cette aire.

d) Sans calculer, comparer $A(12)$ et $A(13)$ en justifiant.

Exercice 5 – Balayage et dichotomie ★★★ *(4 pts)*

Soit $d(x) = x(10 - x)^2$ sur $[0\,;5]$. On admet que d est strictement croissante puis strictement décroissante sur cet intervalle. On donne $d(2{,}51) \approx 140{,}81$ et $d(3{,}76) \approx 146{,}41$.

a) Calculer $d(3)$, $d(3{,}5)$ et $d(4)$.

b) Un balayage de pas $0{,}5$ sur $[0\,;5]$ retient l'abscisse $3{,}5$. En déduire un encadrement de l'abscisse du maximum.

c) On applique la dichotomie : au milieu m, si $d(m) < d(m + 0{,}01)$, on garde $[m\,;b]$, sinon $[a\,;m + 0{,}01]$. Calculer $d(2{,}5)$ et donner l'intervalle gardé après la 1^{re} étape.

d) Calculer $d(3{,}75)$ et donner l'intervalle gardé après la 2^{e} étape.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).