Corrigé et barème – Variations et extrémums

Fonction croissante, décroissante, monotone sur un intervalle, tableau de variations, maximum et minimum, comparer f(a) et f(b), problèmes d'optimisation, balayage et dichotomie en Python.

Durée : 60 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

a) 0,5 et 1,5 appartiennent à $[-2\,;5]$, où f est décroissante, et $0{,}5 < 1{,}5$: l'ordre est inversé, $f(0{,}5) \geqslant f(1{,}5)$. (1)

b) $-1{,}31 < -1{,}3 \leqslant 0$ et la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$: $(-1{,}31)^2 > (-1{,}3)^2$. (1)

c) $(x-7)^2 \geqslant 0$, donc $(x-7)^2 + 2 \geqslant 2$, avec égalité pour $x = 7$: le minimum vaut 2, atteint en 7. (1)

d) C'est une fonction affine de coefficient directeur $-0{,}5 < 0$: elle est décroissante sur $\mathbb{R}$. (1)

Repère — Avant toute comparaison, on vérifie que les deux nombres sont dans un même intervalle de monotonie.

Exercice 2 – Lire un tableau de variations ★★ *(4 pts)*

a) Les images du tableau sont 2, -6, 9 et -4. Le maximum de k sur $[-5\,;7]$ vaut 9, atteint en 3 ; le minimum vaut -6, atteint en -1. (1)

b) 4 et 6 appartiennent à $[3\,;7]$, où k est strictement décroissante, et $4 < 6$: donc $k(4) > k(6)$. (1)

c) Sur $[-1\,;3]$, k est croissante de $k(-1) = -6$ à $k(3) = 9$: pour tout x de $[-1\,;3]$, $-6 \leqslant k(x) \leqslant 9$. (1)

d) Comparer les images des deux bornes ne donne pas le sens de variation sur tout l'intervalle. Contre-exemple : $-1 < 3$ et $k(-1) = -6 < k(3) = 9$, alors qu'une fonction décroissante donnerait $k(-1) \geqslant k(3)$. Donc k n'est pas décroissante sur $[-5\,;7]$. (1)

Repère — Le sens de variation se lit flèche par flèche, jamais en comparant seulement les deux bornes.

Exercice 3 – Démontrer un sens de variation et un extrémum ★★ *(4 pts)*

a) $f(b) - f(a) = b^2 - 12b + 40 - a^2 + 12a - 40 = (b^2 - a^2) - 12(b-a) = (b-a)(b+a) - 12(b-a)$ $= (b-a)(a+b-12)$. (1)

b) Soient $a < b$ dans $[6\,;+\infty[$. Alors $b - a > 0$; et $a \geqslant 6$, $b > 6$ donnent $a + b > 12$, donc $a + b - 12 > 0$. Le produit est strictement positif : $f(a) < f(b)$. Donc f est strictement croissante sur $[6\,;+\infty[$. (1)

c) $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$, donc $f(x) - 4 = x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$. Un carré est positif ou nul : $f(x) \geqslant 4$ pour tout réel x, et $f(6) = 36 - 72 + 40 = 4$. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut 4, atteint en 6. (1)

d) $f(0) = 40$, $f(6) = 4$ et $f(10) = 100 - 120 + 40 = 20$. Sur $[0\,;10]$: f décroît de 40 à 4 sur $[0\,;6]$, puis croît de 4 à 20 sur $[6\,;10]$.

x	0		6		10
$f(x)$	40	↘	4	↗	20

(1)

Méthode — Sens de variation : signe de f(b) − f(a) ; extrémum : signe de f(x) − f(c).

Exercice 4 – Un enclos partagé en deux ★★★ *(4 pts)*

a) Le grillage couvre les trois segments de longueur x et les deux autres côtés, de même longueur L : $3x + 2L = 120$, donc $L = \dfrac{120 - 3x}{2} = 60 - 1{,}5x$ m. L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions : $A(x) = x(60 - 1{,}5x)$. (1)

b) $600 - 1{,}5(x - 20)^2 = 600 - 1{,}5(x^2 - 40x + 400) = 600 - 1{,}5x^2 + 60x - 600 = 60x - 1{,}5x^2$. Or $A(x) = x(60 - 1{,}5x) = 60x - 1{,}5x^2$: les deux expressions sont égales. (1)

c) Pour tout x, $1{,}5(x - 20)^2 \geqslant 0$, donc $A(x) \leqslant 600$, avec égalité pour $x = 20$, qui appartient à $]0\,;40[$. L'aire maximale vaut 600 m^2, pour $x = 20$ m : les deux autres côtés mesurent $60 - 1{,}5 \times 20 = 30$ m. L'enclos mesure 20 m sur 30 m. (1)

d) Pour $0 < a < b \leqslant 20$: $a - 20 < b - 20 \leqslant 0$, et la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $(a-20)^2 > (b-20)^2$, puis $A(a) < A(b)$: A est strictement croissante sur $]0\,;20]$. Comme $12 < 13$, $A(12) < A(13)$. (1)

Méthode — Optimiser : variable et intervalle, expression, extrémum démontré, conclusion avec l'unité.

Exercice 5 – Balayage et dichotomie ★★★ *(4 pts)*

a) $d(3) = 3 \times 7^2 = 147$; $d(3{,}5) = 3{,}5 \times 6{,}5^2 = 3{,}5 \times 42{,}25 = 147{,}875$; $d(4) = 4 \times 6^2 = 144$. (1)

b) La plus grande image calculée est en 3,5, et d monte puis descend : le sommet est à moins d'un pas de 3,5. Le maximum est atteint entre 3 et 4 (en effet $d(3) < d(3{,}5)$ et $d(4) < d(3{,}5)$). (1)

c) Le milieu de $[0\,;5]$ est 2,5 ; $d(2{,}5) = 2{,}5 \times 7{,}5^2 = 2{,}5 \times 56{,}25 = 140{,}625$. Comme $d(2{,}5) < d(2{,}51) \approx 140{,}81$, la fonction monte encore en 2,5 : le sommet est après 2,5. On garde $[2{,}5\,;5]$. (1)

d) Le milieu de $[2{,}5\,;5]$ est 3,75 ; $d(3{,}75) = 3{,}75 \times 6{,}25^2 = 3{,}75 \times 39{,}0625 = 146{,}484375$. Comme $d(3{,}75) > d(3{,}76) \approx 146{,}41$, la fonction descend déjà : le sommet est avant 3,76. On garde $[2{,}5\,;3{,}76]$. (1)

Repère — La dichotomie compare deux images très proches pour savoir si la fonction monte ou descend au milieu.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).