

Corrigé et barème – Trigonométrie dans le triangle rectangle

Du triangle rectangle au cercle trigonométrique : cosinus, sinus, tangente, radian, enroulement de la droite numérique et valeurs remarquables (2^{nde}).

Durée : 90 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Exercice 1 — Un triangle rectangle complet (4 pts)

- Le triangle est rectangle en N , donc $[MP]$ est l'hypoténuse. Pythagore : $MP^2 = 3,6^2 + 7,7^2 = 12,96 + 59,29 = 72,25$, donc $MP = \sqrt{72,25} = 8,5$ cm exactement. (1)
- $[MN]$ est adjacent à l'angle en M : $\cos = \frac{3,6}{8,5} = \frac{36}{85} \approx 0,4235$ (fraction irréductible car $85 = 5 \times 17$ ne divise pas 36). (1)
- $[NP]$ est opposé à l'angle en M : $\sin = \frac{7,7}{8,5} = \frac{77}{85} \approx 0,9059$. (1)
- $\cos^{-1}(0,4235) \approx 64,94^\circ$, soit environ $64,9^\circ$. Contrôle par le sinus : $\sin^{-1}(0,9059) \approx 64,9^\circ$. (1)

Repère — L'hypoténuse se repère avant tout calcul : c'est elle qui départage cosinus et sinus.

Exercice 2 – Exercice 2 — Radians et points images (4 pts)

- $105 \times \frac{\pi}{180} = \frac{105\pi}{180} = \frac{7\pi}{12}$ (simplification par 15). (1)
- $\frac{11\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = \frac{11 \times 180}{9} = 11 \times 20 = 220^\circ$. (1)
- $\frac{19\pi}{6} - 2\pi = \frac{7\pi}{6}$, qui dépasse π ; on retranche encore 2π : $\frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}$, qui appartient à $] -\pi ; \pi]$. (1)
- Deux réels ont le même point image lorsqu'ils diffèrent d'un multiple de 2π : $\frac{\pi}{5} + 2\pi = \frac{11\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5} + 4\pi = \frac{21\pi}{5}$. Or $2\pi = \frac{10\pi}{5}$ et $6\pi = \frac{30\pi}{5}$, donc les deux valeurs sont bien dans l'intervalle. (1)

Erreur fréquente — Un seul retrait de 2π ne suffit pas toujours : il faut vérifier que le résultat appartient réellement à l'intervalle demandé.

Exercice 3 – Exercice 3 — Valeurs exactes et relation fondamentale (4 pts)

- $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, donc $A = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$. (1)
- $B = 1$: la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ vaut pour tout réel x , sans avoir à connaître $\cos \frac{\pi}{8}$ ni $\sin \frac{\pi}{8}$. (1)
- $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, donc $\sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Le point image est dans le quart en bas à droite (ordonnée négative) : $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3} \approx -0,745$. (1)
- Non : $0,45^2 + 0,9^2 = 0,2025 + 0,81 = 1,0125 \neq 1$. La relation fondamentale n'étant pas vérifiée, le point $(0,45 ; 0,9)$ n'est pas sur le cercle trigonométrique. (1)

Le point clé — La relation fondamentale donne un carré : le signe se choisit ensuite, grâce à l'intervalle où se trouve le réel.

Exercice 4 – Exercice 4 — Les haubans d'un mât

(4 pts)

- a) Le triangle ABC est rectangle en A (mât vertical, sol horizontal). $[AB]$ est opposé à l'angle en C et $[AC]$ lui est adjacent : $\tan(62^\circ) = \frac{AB}{AC}$, donc $AB = 4,8 \times 1,88073 = 9,0275$, soit $AB \approx 9,03$ m. (1)
- b) $[BC]$ est l'hypoténuse : $\cos(62^\circ) = \frac{AC}{BC}$, donc $BC = \frac{4,8}{0,46947} = 10,2243$, soit $BC \approx 10,22$ m. (1)
- c) Le triangle ABD est rectangle en A : $\tan(\text{angle en } D) = \frac{AB}{AD} = \frac{9,0275}{7,5} \approx 1,20367$, donc l'angle vaut $\tan^{-1}(1,20367) \approx 50,28^\circ$, soit environ $50,3^\circ$. Il est plus faible que 62° , ce qui est cohérent : le piquet est plus éloigné. (1)
- d) Le triangle ABD étant rectangle en A , le théorème de Pythagore donne $BD^2 = AB^2 + AD^2$, et comme $BD > 0$ on obtient $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$. Numériquement : $BD = \sqrt{9,0275^2 + 7,5^2} = \sqrt{81,496 + 56,25} = \sqrt{137,746} \approx 11,7365$, soit $BD \approx 11,74$ m. (1)

Attention — On conserve la valeur non arrondie de AB dans les questions suivantes : arrondir dès la première réponse fausse le dernier chiffre des suivantes.

Exercice 5 – Exercice 5 — Raisonner et corriger

(4 pts)

- a) L'élève confond un nombre et une mesure d'angle en degrés : $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$, ce qui n'est pas égal à 45. L'égalité correcte est $\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$: ce sont deux mesures du même angle dans deux unités différentes. (1)
- b) $\sin x$ est l'ordonnée d'un point du cercle de centre O et de rayon 1, donc $-1 \leq \sin x \leq 1$. Or $\frac{7}{5} = 1,4 > 1$: aucun réel ne convient. (1)
- c) L'abscisse est strictement négative à gauche de l'axe des ordonnées, entre les points images de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3\pi}{2}$, ces deux points étant exclus car leur abscisse est nulle. Donc $x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$. (1)
- d) L'hypoténuse est $[BC]$. Le côté $[AB]$ est adjacent à l'angle en B , donc son cosinus vaut $\frac{AB}{BC}$. Ce même côté $[AB]$ est opposé à l'angle en C , donc le sinus de l'angle en C vaut aussi $\frac{AB}{BC}$. Les deux quotients sont identiques, d'où l'égalité (les deux angles sont complémentaires). (1)

À retenir — Un même côté est adjacent à un angle aigu et opposé à l'autre : c'est toute l'origine des relations entre angles complémentaires.