Racines carrées

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Nombres et calculs · Racines carrées)

La démarche face à un calcul avec des racines

1. Je vérifie que chaque nombre sous une racine est positif ou nul.

2. Je simplifie chaque racine : carré parfait, produit ou quotient regroupé, forme $k\sqrt{b}$.

3. Je calcule : je regroupe les termes ayant la même racine, je développe, j'enlève la racine du dénominateur.

4. Je conclus avec une valeur exacte ; je ne donne une valeur approchée ($\approx$) que si on la demande, et je compare ou j'encadre avec les carrés.

Le réflexe — une valeur exacte garde ses racines ; une égalité $\sqrt{a} = b$ se justifie par les deux conditions $b \geq 0$ et $b^2 = a$.

Cas 1 · Calculer une racine carrée

Réflexe — je cherche le nombre positif dont le carré vaut a ; $(\sqrt{a})^2 = a$ pour $a \geq 0$.

Exemple. Questions types : « Calculer sans calculatrice », « Justifier que $\sqrt{a} = b$ ». Exemple : $\sqrt{1{,}44}$ et $\left(\sqrt{23}\right)^2$.

$1{,}2^2 = 1{,}44$ et $1{,}2 \geqslant 0$, donc $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$.

$23 \geqslant 0$, donc par définition $\left(\sqrt{23}\right)^2 = 23$.

Attention — $\sqrt{a}$ n'est jamais négatif ; $\sqrt{(-4)}$ n'existe pas, $-\sqrt{4} = -2$ existe.

Cas 2 · Produit et quotient

Réflexe — je regroupe sous une seule racine : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{(ab)}$, $\sqrt{a} \,/\, \sqrt{b} = \sqrt{(a/b)}$.

Exemple. Questions types : « Calculer et donner un entier ou une fraction ». Exemple : $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$ et $\sqrt{\dfrac{25}{49}}$.

$6 \geqslant 0$ et $24 \geqslant 0$: $\sqrt{6} \times \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12$.

$\sqrt{\dfrac{25}{49}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \dfrac{5}{7}$.

Attention — la règle demande $a \geq 0$ et $b \geq 0$; elle ne vaut jamais pour une somme.

Cas 3 · Simplifier et additionner

Réflexe — je sors le plus grand carré parfait : $\sqrt{(k^2 b)} = k\sqrt{b}$; puis je regroupe les mêmes racines.

Exemple. Questions types : « Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ ». Exemple : $\sqrt{52} + \sqrt{117}$.

$52 = 4 \times 13$, donc $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

$117 = 9 \times 13$, donc $\sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

$\sqrt{52} + \sqrt{117} = 2\sqrt{13} + 3\sqrt{13} = 5\sqrt{13}$.

Attention — $\sqrt{(a+b)} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, pas $\sqrt{6}$.

Cas 4 · Développer, dénominateur sans racine

Réflexe — je multiplie en haut et en bas par $\sqrt{b}$ ou par le conjugué ; $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Exemple. Questions types : « Écrire sans racine au dénominateur ». Exemple : $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$.

Le conjugué de $\sqrt{5}+1$ est $\sqrt{5}-1$.

$$\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}.$$

Donc $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}-1$.

Attention — on multiplie le numérateur ET le dénominateur ; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \neq a+b$.

Cas 5 · Racine d'un carré

Réflexe — $\sqrt{(A^2)} = |A|$: je cherche le signe de A.

Exemple. Questions types : « Écrire sans racine ». Exemple : $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$.

$9 < 10$, donc $3 < \sqrt{10}$ et $3 - \sqrt{10} < 0$.

Donc $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2} = -\left(3-\sqrt{10}\right) = \sqrt{10}-3$.

Attention — $\sqrt{(a^2)} = a$ seulement si $a \geq 0$.

Cas 6 · Comparer, encadrer

Réflexe — nombres positifs : je compare les carrés ; pour encadrer $\sqrt{a}$, je cherche les carrés qui encadrent a.

Exemple. Questions types : « Comparer sans calculatrice », « Encadrer au dixième ». Exemple : $2\sqrt{6}$ et $3\sqrt{3}$, puis $\sqrt{40}$.

Nombres positifs : $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24$ et $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$. Comme $24 < 27$, $2\sqrt{6} < 3\sqrt{3}$.

$6{,}3^2 = 39{,}69$ et $6{,}4^2 = 40{,}96$: $39{,}69 < 40 < 40{,}96$, donc $6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$.

Attention — seulement pour des nombres positifs : $-3 < 2$ mais $9 > 4$.

Les pièges

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$: $\sqrt{(9+16)} = 5$ mais $\sqrt{9}+\sqrt{16} = 7$.
- $\sqrt{a} \geq 0$ toujours : $\sqrt{49} = 7$, jamais « ± 7 ».
- $\sqrt{(a^2)} = |a|$: si $a < 0$, le résultat est $-a$.
- Forme $a\sqrt{b}$ pas finie si le nombre sous la racine contient encore un carré ($2\sqrt{18} \to 6\sqrt{2}$).
- Une valeur approchée (1,414) ne remplace pas une valeur exacte ($\sqrt{2}$).
- Comparer par les carrés : seulement des nombres positifs.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).