

Corrigé et barème – Probabilités et échantillonnage

Expériences aléatoires, probabilités conditionnelles, arbres pondérés, fluctuation d'échantillonnage et loi des grands nombres (programme de 2nde, BO 2026)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Abonnés d'une médiathèque

(4 pts)

- a) Adultes sans numérique : $180 - 63 = 117$; mineurs sans numérique : $120 - 84 = 36$; total numérique : $63 + 84 = 147$; total sans : $117 + 36 = 153$ ($147 + 153 = 300$). (1)
- b) $P(N) = \frac{147}{300} = 0,49$; $P(M \cap N) = \frac{84}{300} = 0,28$. (1)
- c) $P_M(N) = \frac{84}{120} = 0,7$: parmi les mineurs, 70 % ont emprunté un livre numérique. (1)
- d) $P_N(M) = \frac{84}{147} = \frac{4}{7} \approx 0,571$: même numérateur (84) mais on divise par le nombre d'emprunteurs de numérique (147) et non par le nombre de mineurs (120). (1)

Erreur fréquente — Le dénominateur d'une probabilité conditionnelle est toujours l'effectif de la condition, jamais l'effectif total.

Exercice 2 – Réunion et intersection

(4 pts)

- a) $P(A \cup B) = 0,55 + 0,25 - 0,1 = 0,7$. (1)
- b) $P_A(B) = \frac{0,1}{0,55} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} \approx 0,182$. (1)
- c) $P_B(A) = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$. (1)
- d) Il a additionné $P(A) + P(B) = 0,8$ sans retrancher $P(A \cap B) = 0,1$: cette formule n'est valable que pour des événements incompatibles, et ici $P(A \cap B) \neq 0$. (1)

À retenir — La formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ est toujours vraie ; sa version sans intersection exige des événements incompatibles.

Exercice 3 – Boîte de chocolats

(4 pts)

- a) $P(N_1) = \frac{5}{8}$, $P(L_1) = \frac{3}{8}$; après N_1 : $\frac{4}{7}$ (noir) et $\frac{3}{7}$ (lait) ; après L_1 : $\frac{5}{7}$ (noir) et $\frac{2}{7}$ (lait). (1)
- b) $P(N_1 \cap N_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$. (1)
- c) $P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$. (1)
- d) $P(L_2) = P(N_1 \cap L_2) + P(L_1 \cap L_2) = \frac{15}{56} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$. (1)

Le point clé — Sans remise, les probabilités du second niveau se calculent avec 7 chocolats, et l'effectif de la sorte déjà mangée diminue de 1.

Exercice 4 – Dépistage d'une allergie

(4 pts)

- a) A (0,05) puis T (0,97), $\bar{T}$ (0,03) ; $\bar{A}$ (0,95) puis T (0,06), $\bar{T}$ (0,94). $P(A \cap T) = 0,05 \times 0,97 = 0,0485$. (1)
- b) $P(T) = 0,0485 + 0,95 \times 0,06 = 0,0485 + 0,057 = 0,1055$. (1)
- c) $P_T(A) = \frac{0,0485}{0,1055} = \frac{97}{211} \approx 0,46$. (1)
- d) Le 97 % est $P_A(T)$, pas $P_T(A)$. Les allergiques étant rares (5 %), les 6 % de faux positifs parmi les 95 % de non-allergiques (0,057) dépassent les vrais positifs (0,0485) : plus de la moitié des tests positifs concernent des personnes non allergiques. (1)

Attention — La fiabilité d'un résultat positif se mesure par $P_T(A)$, qui dépend fortement de la rareté du caractère recherché.

Exercice 5 – Contrôle de production*(4 pts)*

- a) Minimum : $\frac{9}{200} = 0,045$; maximum : $\frac{16}{200} = 0,08$; étendue : $0,08 - 0,045 = 0,035$. (1)
- b) Total non conformes : $11 + 14 + 9 + 16 + 12 + 13 + 10 + 15 = 100$; $f = \frac{100}{1600} = 0,0625$. (1)
- c) D'après la loi des grands nombres, sur un grand échantillon (1 600 pièces) la fréquence est proche de la probabilité : $p \approx 0,0625$, soit environ 6 %. (1)
- d) Sur des échantillons de taille 200, les fréquences fluctuent naturellement entre 0,045 et 0,08 : la valeur 0,08 reste dans la plage observée et ne prouve rien à elle seule ; il faudrait un écart durable sur de nombreux échantillons. (1)

Repère — Un seul échantillon éloigné de la moyenne relève de la fluctuation ; c'est la répétition d'écarts qui signale un vrai changement.