Logique et raisonnements

Fiche méthode

(Maths 2nde · Vocabulaire ensembliste et logique)

La démarche face à une affirmation

1. Je repère la forme de l'affirmation : « pour tout » (même caché), « il existe », « et », « ou », « si. . ., alors. . . », « si et seulement si ».

2. Je décide si elle me semble vraie ou fausse, en testant quelques valeurs (dont 0, des négatifs, des décimaux).

3. Fausse : je donne un contre-exemple et je montre le calcul. **Vraie :** je choisis le raisonnement (direct, contraposée, disjonction des cas, absurde) et je l'annonce.

4. Je conclus par une phrase : « l'affirmation est vraie » ou « l'affirmation est fausse ».

Le réflexe — un contre-exemple suffit pour dire « faux », mais des exemples ne suffisent jamais pour dire « vrai » à un « pour tout ».

Cas 1 · « Pour tout », « il existe », contre-exemple

Réflexe — « pour tout » faux : un contre-exemple vérifié ; « il existe » vrai : un exemple ; « pour tout » vrai : un calcul valable pour toutes les valeurs.

Exemple. Questions types : « Vrai ou faux ? Justifier. » Exemple : « pour tout entier $n \geqslant 1$, $2n+1$ est un nombre premier ».

Je teste : $n=1$ donne 3, $n=2$ donne 5, $n=3$ donne 7, $n=4$ donne $9=3\times 3$.

9 n'est pas premier : $n=4$ est un contre-exemple.

L'affirmation est fausse.

Attention — trois exemples qui marchent ne prouvent pas un « pour tout ».

Cas 2 · Et, ou, négation

Réflexe — je retourne chaque comparaison et j'échange « et » avec « ou ».

Exemple. Questions types : « Écrire la négation de. . . ». Exemple : « $x \in]-1\,;8]$ ».

$x \in]-1\,;8]$ signifie « $x > -1$ et $x \leqslant 8$ ».

Négation : « $x \leqslant -1$ ou $x > 8$ ».

Autrement dit, $x \in]-\infty\,;-1] \cup]8\,;+\infty[$.

Attention — la négation de $x > a$ est $x \leqslant a$ (le cas d'égalité change de camp).

Cas 3 · Implication, réciproque, équivalence

Réflexe — j'écris l'implication puis sa réciproque ; je démontre ou je réfute chacune ; les deux vraies : équivalence.

Exemple. Questions types : « Énoncer la réciproque. Est-elle vraie ? » Exemple : « si $x=2$, alors $x^2+x=6$ ».

Implication vraie : $2^2+2=6$.

Réciproque : « si $x^2+x=6$, alors $x=2$ ».

Pour $x=-3$: $(-3)^2+(-3)=9-3=6$, mais $x \neq 2$. La réciproque est fausse : ce n'est pas une équivalence.

Attention — une réciproque vraie ne se suppose jamais : elle se démontre.

Cas 4 · Contraposée

Réflexe — contraposée = nier les deux propositions et les échanger ; elle a toujours la même vérité que l'implication.

Exemple. Questions types : « Énoncer la contraposée », « Démontrer par contraposée ». Exemple : « si un entier est multiple de 15, alors il est multiple de 5 ».

Contraposée : « si un entier n'est pas multiple de 5, alors il n'est pas multiple de 15 ».
L'implication est vraie ($15k = 5 \times 3k$), donc la contraposée est vraie aussi.

Attention — « si non P, alors non Q » n'est pas la contraposée (c'est la contraposée de la réciproque).

Cas 5 · Disjonction des cas, absurde

Réflexe — plusieurs situations : je sépare les cas qui couvrent tout ; « il n'existe pas » : je suppose le contraire et je cherche une contradiction.

Exemple. Questions types : « Démontrer que pour tout entier n… ». Exemple : $n^2 - 3n + 1$ est impair pour tout entier n.

$n^2 - 3n + 1 = n(n-3) + 1$.
Si n est pair, le facteur n est pair, donc $n(n-3)$ est pair. Si n est impair, $n-3$ est pair, donc $n(n-3)$ est pair.
Dans les deux cas, $n(n-3)$ est pair et $n^2 - 3n + 1$ est impair.

Attention — chaque cas se conclut, et l'ensemble des cas doit couvrir toutes les valeurs.

Les pièges

- La négation de « $x > 5$ » est « $x \leqslant 5$ », pas « $x < 5$ » : le cas d'égalité change de camp.
- Le « ou » des maths est inclusif : « P ou Q » reste vraie si P et Q sont vraies.
- Une implication vraie peut avoir une réciproque fausse : on ne « retourne » pas un théorème sans le démontrer.
- Contraposée et réciproque ne se confondent pas : seule la contraposée garde la vérité.
- Un contre-exemple doit vérifier l'hypothèse et appartenir à l'ensemble annoncé.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).