Devoir surveillé – Logique : propositions, implication et raisonnements

Propositions, « pour tout » et « il existe », contre-exemple, « et », « ou » et négation, implication, réciproque, contraposée, équivalence, disjonction des cas et raisonnement par l'absurde.

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

Questions courtes, sans calculatrice. Justifier brièvement.

a) Écrire la négation de « $x \leqslant -1$ ou $x > 6$ ».

b) La proposition « pour tout entier naturel n, $n^2 + 2$ est un nombre premier » est-elle vraie ?

c) Énoncer la réciproque de « si un entier est multiple de 9, alors il est multiple de 3 » et dire si elle est vraie.

d) La proposition « il existe un réel x tel que $7x + 3 = 3x - 5$ » est-elle vraie ?

Exercice 2 – Et, ou, négation ★★ *(3 pts)*

On choisit un entier n de $E = \{1 ; 2 ; \dots ; 30\}$. On note P : « n est impair » et Q : « n est un multiple de 7 ».

a) Lister les entiers de E qui vérifient « P et Q ».

b) Combien d'entiers de E vérifient « P ou Q » ? Justifier.

c) Écrire la négation de « P et Q », puis donner le nombre d'entiers de E qui la vérifient.

Exercice 3 – Implication, réciproque, contraposée ★★ *(5 pts)*

Pour un réel x, on considère l'implication I : « si $x > 4$, alors $x^2 > 3x$ ».

a) Démontrer l'implication I.

b) Énoncer la réciproque de I. Est-elle vraie ? Justifier.

c) Énoncer la contraposée de I et donner, en justifiant, sa valeur de vérité.

d) Le triangle ABC vérifie $AB = 9$, $AC = 12$ et $BC = 16$. Est-il rectangle ? Justifier.

e) Le triangle UVW vérifie $UV = 12$, $VW = 35$ et $UW = 37$. Est-il rectangle ? Justifier.

Exercice 4 – Choisir son raisonnement ★★★ *(8 pts)*

Les lettres n et k désignent des entiers, x un réel. Chaque question demande un raisonnement précis, à annoncer.

a) Démontrer par disjonction des cas que, pour tout entier n, $5n^2 + 3n$ est pair.

b) Démontrer par l'absurde qu'il n'existe aucun réel x tel que $(x + 2)^2 = 4x$.

c) Démontrer par contraposée que, pour tout entier n, si $3n + 2$ est impair, alors n est impair.

d) Un élève affirme : « pour tout réel x, $|x - 1| = x - 1$ ». Montrer qu'il a tort, puis dire pour quels réels x l'égalité est vraie. (On rappelle que $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$.)

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).