# Corrigé et barème – Logique : propositions, implication et raisonnements

Propositions, « pour tout » et « il existe », contre-exemple, « et », « ou » et négation, implication, réciproque, contraposée, équivalence, disjonction des cas et raisonnement par l'absurde.

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

## Exercice 1 – Automatismes ★★ *(4 pts)*

a) On nie chaque comparaison et « ou » devient « et » : la négation est « $x > -1$ et $x \leqslant 6$ », c'est-à-dire $x \in ]-1\,;6]$. (1)

b) Elle est fausse. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient 2 et 3, qui sont premiers ; mais pour $n = 2$, $n^2 + 2 = 6 = 2 \times 3$, qui n'est pas premier. $n = 2$ est un contre-exemple. (1)

c) Réciproque : « si un entier est multiple de 3, alors il est multiple de 9 ». Elle est fausse : $6 = 3 \times 2$ est multiple de 3, mais 6 n'est pas multiple de 9. (1)

d) Elle est vraie : $7x + 3 = 3x - 5 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$. Vérification : $7 \times (-2) + 3 = -11$ et $3 \times (-2) - 5 = -11$. Un exemple suffit pour un « il existe ». (1)

**Repère** — Un « pour tout » se réfute par un contre-exemple ; un « il existe » se prouve par un exemple.

## Exercice 2 – Et, ou, négation ★★ *(3 pts)*

a) Les multiples de 7 de $E$ sont 7, 14, 21 et 28 ; les impairs parmi eux sont 7 et 21. « $P$ et $Q$ » est vraie pour 7 et 21. (1)

b) $E$ contient 15 entiers impairs. On ajoute les multiples de 7 qui ne sont pas déjà comptés, c'est-à-dire les pairs : 14 et 28. « $P$ ou $Q$ » est vraie pour $15 + 2 = 17$ entiers (le « ou » est inclusif : 7 et 21 ne sont comptés qu'une fois). (1)

c) non ($P$ et $Q$) = (non $P$) ou (non $Q$) : « $n$ est pair ou $n$ n'est pas un multiple de 7 ». Elle est vraie pour tous les entiers de $E$ sauf 7 et 21 : $30 - 2 = 28$ entiers. (1)

**Repère** — La négation de « $P$ et $Q$ » est « non $P$ ou non $Q$ » : elle est vraie pour tous les éléments qui ne vérifient pas « $P$ et $Q$ ».

## Exercice 3 – Implication, réciproque, contraposée ★★ *(5 pts)*

a) Soit $x$ un réel tel que $x > 4$. On a $x^2 - 3x = x(x-3)$. Comme $x > 4$, on a $x > 0$ et $x - 3 > 1 > 0$ : le produit de deux nombres strictement positifs est strictement positif, donc $x^2 - 3x > 0$, soit $x^2 > 3x$. L'implication $I$ est vraie. (1)

b) Réciproque : « si $x^2 > 3x$, alors $x > 4$ ». Elle est fausse : pour $x = -1$, $x^2 = 1$ et $3x = -3$, donc $x^2 > 3x$ ; pourtant $-1 \leqslant 4$. C'est un contre-exemple. (1)

c) Contraposée : « si $x^2 \leqslant 3x$, alors $x \leqslant 4$ » (la négation de $x^2 > 3x$ est $x^2 \leqslant 3x$, celle de $x > 4$ est $x \leqslant 4$). Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité : comme $I$ est vraie, la contraposée est vraie. (1)

d) Le plus grand côté est $[BC]$ : $BC^2 = 256$ et $AB^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$. Comme $256 \neq 225$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, $ABC$ n'est pas rectangle en $A$. Un angle droit ne pourrait être qu'en $A$, opposé au plus grand côté : $ABC$ n'est pas rectangle. (1)

e) Le plus grand côté est $[UW]$ : $UW^2 = 1\,369$ et $UV^2 + VW^2 = 144 + 1\,225 = 1\,369$. L'égalité est vraie : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, $UVW$ est rectangle en $V$. (1)

**Repère** — Réciproque de Pythagore pour prouver qu'un triangle est rectangle, contraposée pour prouver qu'il ne l'est pas.

## Exercice 4 – Choisir son raisonnement ★★★ *(8 pts)*

a) Distinguons deux cas, qui couvrent tous les entiers. **Si $n$ est pair**, $n = 2k$ : $5n^2 + 3n = 20k^2 + 6k = 2(10k^2 + 3k)$, qui est pair. **Si $n$ est impair**, $n = 2k+1$ : $5n^2 + 3n = 5(4k^2 + 4k + 1) + 6k + 3 = 20k^2 + 26k + 8 = 2(10k^2 + 13k + 4)$, qui est pair. Dans les deux cas, $5n^2 + 3n$ est pair. (2)

b) Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe un réel $x$ tel que $(x+2)^2 = 4x$. En développant, $x^2 + 4x + 4 = 4x$, donc $x^2 = -4$. Or un carré est toujours positif ou nul : $x^2 \geqslant 0 > -4$. C'est une contradiction : aucun réel ne vérifie $(x+2)^2 = 4x$. (2)

c) Raisonnons par contraposée : montrons que si $n$ est pair, alors $3n+2$ est pair. Soit $n$ pair, $n = 2k$ : $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k+1)$, où $3k+1$ est un entier. Donc $3n+2$ est pair. La contraposée est vraie, donc l'implication « si $3n+2$ est impair, alors $n$ est impair » est vraie. (2)

d) C'est un « pour tout » : un contre-exemple suffit. Pour $x = 0$, $|0 - 1| = 1$ alors que $0 - 1 = -1$ : l'affirmation est fausse. Par définition de la valeur absolue, $|x-1| = x - 1$ lorsque $x - 1 \geqslant 0$, et $|x-1| = -(x-1)$ lorsque $x - 1 < 0$ ; dans ce second cas, $-(x-1) > 0 > x - 1$, donc l'égalité est fausse. L'égalité est vraie si et seulement si $x \geqslant 1$, soit $x \in [1\,;+\infty[$. (2)

**Repère** — J'annonce toujours mon raisonnement : « distinguons deux cas », « raisonnons par l'absurde », « raisonnons par contraposée ».

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*