Inégalités et inéquations

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Nombres et calculs · Algèbre)

La démarche face à une inégalité

1. Je repère la question : comparer deux nombres, encadrer une expression, résoudre une inéquation, ou traduire un énoncé.

2. Je choisis l'outil : différence $A - B$ (cas général), quotient $\frac{A}{B}$ (nombres strictement positifs avec produits ou puissances), règles opératoires (encadrements, inéquations).

3. À chaque multiplication ou division, je regarde le signe du nombre : négatif, je change le sens.

4. Je conclus par une phrase : « donc $A \geqslant B$ », « $S = \dots$ », ou la réponse à la question posée.

Le réflexe — chaque changement de sens se justifie : « on divise par $-2 < 0$, le sens change ». Sans cette phrase, la réponse n'est pas complète.

Cas 1 · Comparer par la différence

Réflexe — je calcule A − B, je simplifie (même dénominateur, carré), je conclus sur le signe.

Exemple. Questions types : « Comparer A et B », « Montrer que pour tout réel x, … ». Exemple : comparer $3x^2 + 12$ et $12x$.

$(3x^2 + 12) - 12x = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$.

Un carré est positif ou nul et $3 > 0$, donc la différence est positive ou nulle.

Conclusion : pour tout réel x, $3x^2 + 12 \geqslant 12x$, avec égalité seulement pour $x = 2$.

Attention — un carré est positif ou nul, pas forcément strictement positif ; tester des valeurs ne prouve rien.

Cas 2 · Comparer par le quotient

Réflexe — nombres strictement positifs avec produits ou puissances : je calcule A/B et je le compare à 1.

Exemple. Questions types : « Comparer deux puissances », « Combien de fois plus grand ? ». Exemple : $A = 9 \times 2^{20}$ et $B = 2^{23}$.

A et B sont strictement positifs. $\frac{A}{B} = \frac{9 \times 2^{20}}{2^{23}} = \frac{9}{2^3} = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

Comme $1{,}125 > 1$, $A > B$.

Interprétation : A vaut 1,125 fois B, il est 12,5 % plus grand.

Attention — jamais avec des négatifs ; un rapport se lit dans un sens précis.

Cas 3 · Encadrer une expression

Réflexe — j'applique les opérations une par une aux bornes ; facteur négatif : je retourne et je remets dans l'ordre.

Exemple. Questions types : « Encadrer $kx + p$ », « Encadrer $a + b$ ou $a - b$ ». Exemple : $-1 < x \leqslant 3$, encadrer $4 - 5x$.

On multiplie par $-5 < 0$, le sens change : $5 > -5x \geqslant -15$, soit $-15 \leqslant -5x < 5$.

On ajoute 4 : $-11 \leqslant 4 - 5x < 9$.

Contrôle : la fonction $x \mapsto 4 - 5x$ est décroissante, la borne 3 donne -11.

Attention — on ne soustrait pas deux encadrements : on encadre −b, puis on additionne.

Cas 4 · Résoudre une inéquation du premier degré

Réflexe — termes en x d'un côté, nombres de l'autre ; j'entoure le coefficient de x avant de diviser.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ », « Donner l'ensemble des solutions ». Exemple : $3(2x-1) > 8x+5$.

On développe : $6x - 3 > 8x + 5$, puis $6x - 8x > 5 + 3$, soit $-2x > 8$.
On divise par $-2 < 0$, le sens change : $x < -4$.
$S =]-\infty\,;-4[$. Contrôle avec $x = -5$: $-33 > -35$, vrai.

Attention — la réponse est un ensemble ; crochet ouvert pour une inégalité stricte et toujours vers l'infini.

Cas 5 · Mettre un problème en inéquation

Réflexe — inconnue, traduction des mots, résolution, retour à la question (entier, phrase).

Exemple. Questions types : « À partir de combien… ? », « Au plus combien… ? ». Exemple : un parking coûte 3 € à l'entrée puis 1,50 € par heure entamée ; avec au plus 20 €, combien d'heures au maximum ?

Pour n heures : $3 + 1{,}5n \leqslant 20$, donc $1{,}5n \leqslant 17$ et $n \leqslant \dfrac{34}{3} \approx 11{,}3$.
n est entier : $n = 11$ convient ($3 + 16{,}5 = 19{,}5$ €), $n = 12$ non (21 €).
On peut stationner au plus 11 heures.

Attention — arrondir dans le bon sens et vérifier le cas d'égalité.

Les pièges

- Diviser par un nombre négatif sans changer le sens : c'est l'erreur la plus fréquente.
- Soustraire ou multiplier deux inégalités membre à membre : ce n'est pas permis.
- Comparer deux négatifs par leur quotient : la règle exige des nombres strictement positifs.
- Donner « x = … » comme réponse d'une inéquation : on attend l'ensemble S.
- Multiplier par x (ou une expression) sans connaître son signe.
- Arrondir n ≤ 12,5 à 13 : un nombre entier d'objets s'arrondit dans le sens de l'inégalité.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).