

Corrigé et barème – Généralités sur les fonctions

Notion de fonction, domaine de définition, image et antécédent — programme de 2^{nde} générale

Durée : 90 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Exercice 1 — Domaine, image et antécédents

(4 pts)

- a) $3x + 6 = 0$ pour $x = -2$: $D_f = \mathbb{R}$ privé de -2 . (1)
- b) $f(0) = \frac{-7}{6}$; $f(4) = \frac{-3}{18} = -\frac{1}{6}$. (1)
- c) $\frac{x-7}{3x+6} = -1$ donne $x - 7 = -(3x + 6)$, soit $x - 7 = -3x - 6$, puis $4x = 1$, donc $x = 0,25$ (valeur du domaine). (1)
- d) $\frac{x-7}{3x+6} = \frac{1}{3}$ donne $3(x - 7) = 3x + 6$, soit $-21 = 6$: impossible, aucun antécédent. (1)

Erreur fréquente — On cherche la valeur interdite sur l'expression de départ, et on vérifie toujours que la solution trouvée appartient au domaine.

Exercice 2 – Exercice 2 — Lecture d'un tableau de variations

(4 pts)

- a) Maximum : 9, atteint en $x = 3$. Minimum : -6 , atteint en $x = -1$. (1)
- b) 4 et 6 sont dans $[3 ; 7]$ où k décroît, et $4 < 6$: donc $k(4) > k(6)$. (1)
- c) Une solution sur $[-5 ; -1]$ (de 2 à -6), une sur $[-1 ; 3]$ (de -6 à 9), une sur $[3 ; 7]$ (de 9 à -4) : 3 solutions. (1)
- d) Comparer les valeurs aux deux extrémités ne donne pas le sens de variation : $k(-1) = -6 < k(3) = 9$ alors que $-1 < 3$, donc k n'est pas décroissante sur tout l'intervalle. (1)

Le point clé — Deux images ne se comparent qu'à l'intérieur d'un même intervalle de monotonie.

Exercice 3 – Exercice 3 — Forme canonique et extremum

(4 pts)

- a) $(x - 6)^2 + 4 = x^2 - 12x + 36 + 4 = x^2 - 12x + 40 = f(x)$. (1)
- b) $(x - 6)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq 4$, avec $f(6) = 4$: minimum 4, atteint en $x = 6$. (1)
- c) $f(0) = 40$, $f(6) = 4$, $f(10) = 20$: décroissante de 40 à 4 sur $[0 ; 6]$, croissante de 4 à 20 sur $[6 ; 10]$. (1)
- d) $(x - 6)^2 + 4 = 13$ donne $(x - 6)^2 = 9$, soit $x - 6 = 3$ ou $x - 6 = -3$: $x = 9$ ou $x = 3$. (1)

Attention — Une équation du type $(x - a)^2 = k$ avec $k > 0$ a deux solutions : oublier la solution négative coûte la moitié des points.

Exercice 4 – Exercice 4 — Signes et inéquations

(4 pts)

- a) $4 - x$ s'annule en 4 (positif avant, négatif après) ; $2x + 9$ s'annule en $-4,5$ (négatif avant, positif après). Produit : négatif sur $] -\infty ; -4,5[$, positif sur $] -4,5 ; 4[$, négatif sur $]4 ; +\infty[$. (1)
- b) $S =] -4,5 ; 4[$. (1)
- c) $5 - x = 0$ pour $x = 5$: $D_Q = \mathbb{R}$ privé de 5. Q est négatif sur $] -\infty ; -6[$, nul en -6 , positif sur $] -6 ; 5[$, négatif sur $]5 ; +\infty[$. (1)
- d) $S =] -\infty ; -6] \cup]5 ; +\infty[$: -6 est inclus car $Q(-6) = 0$, mais 5 est exclu car c'est la valeur interdite. (1)

Repère — Dans un quotient, la valeur interdite est toujours exclue de l'ensemble des solutions, même avec une inégalité large.

Exercice 5 – Exercice 5 — Recette d'un club sportif*(4 pts)*

- a) Recette = prix $\times$ nombre d'adhérents : $R(p) = p(400 - 10p) = 400p - 10p^2$. (1)
- b) $R(12) = 12 \times 280 = 3\,360$ € et $R(28) = 28 \times 120 = 3\,360$ € : deux prix différents donnent la même recette. (1)
- c) $-10(p^2 - 40p + 400) + 4\,000 = -10p^2 + 400p - 4\,000 + 4\,000 = -10p^2 + 400p$. (1)
- d) $(p - 20)^2 \geq 0$ donc $R(p) \leq 4\,000$, avec égalité en $p = 20$: recette maximale de 4 000 € pour un abonnement à 20 €. (1)

À retenir — Un maximum ne se lit pas sur quelques valeurs calculées : il se démontre avec la forme canonique et le signe d'un carré.