Fonctions racine carrée et cube

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Approfondissement (plus au programme depuis 2026) · Fonctions)

La démarche face à $\sqrt{x}$ ou x^3

1. Je repère la fonction : racine carrée (définie seulement pour $x \geqslant 0$, toujours positive) ou cube (définie sur $\mathbb{R}$, du signe de x).

2. Je pose la condition : pour $\sqrt{A}$, j'écris $A \geqslant 0$; pour un cube, aucune condition.

3. J'utilise la croissance : les deux fonctions conservent l'ordre (sur $[0\,;+\infty[$ pour la racine, sur $\mathbb{R}$ pour le cube). J'élève au carré seulement si les deux membres sont positifs.

4. Je conclus par un ensemble de solutions qui respecte la condition, ou par une phrase qui cite la propriété utilisée.

Le réflexe — chaque comparaison ou résolution se justifie par « la fonction … est strictement croissante sur … » ; sans cette phrase, le raisonnement est incomplet.

Cas 1 · Calculer et comparer des racines carrées

Réflexe — $\sqrt{a} = b$ se prouve par « $b \geq 0$ et $b^2 = a$ » ; pour comparer, je compare les nombres sous les racines.

Exemple. Questions types : « Calculer sans calculatrice », « Comparer sans calculatrice ». Exemple : $\sqrt{0{,}0196}$, puis comparer $\sqrt{7{,}9}$ et $\sqrt{8}$.

$0{,}14 \geqslant 0$ et $0{,}14^2 = 0{,}0196$, donc $\sqrt{0{,}0196} = 0{,}14$.

$0 \leqslant 7{,}9 < 8$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{7{,}9} < \sqrt{8}$.

Attention — $\sqrt{x}$ n'existe pas pour $x < 0$ et n'est jamais négatif : $\sqrt{9} = 3$, pas ± 3.

Cas 2 · Calculer un cube, utiliser la symétrie

Réflexe — cube d'un négatif : cube de l'opposé, puis signe moins ; $(-x)^3 = -x^3$; la courbe est symétrique par rapport à O.

Exemple. Questions types : « Calculer », « Donner sans calcul », « Comparer ». Exemple : $(-0{,}15)^3$, puis comparer $(-5{,}1)^3$ et $(-5{,}01)^3$.

$0{,}15^3 = 0{,}0225 \times 0{,}15 = 0{,}003\,375$, donc $(-0{,}15)^3 = -0{,}003\,375$.

$-5{,}1 < -5{,}01$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $(-5{,}1)^3 < (-5{,}01)^3$.

Attention — $(-4)^3 = -64$: ni 64, ni $3 \times (-4)$; la courbe du cube n'a pas de minimum.

Cas 3 · Résoudre $\sqrt{x} = k$ ou $\sqrt{x} \leq k$

Réflexe — $k < 0$: $\sqrt{x} = k$ impossible ; $k \geq 0$: j'élève au carré et je garde $x \geq 0$.

Exemple. Questions types : « Résoudre », « Déterminer l'antécédent ». Exemple : $\sqrt{x} = 2{,}4$ et $\sqrt{x} \leqslant 4{,}5$.

$2{,}4 \geqslant 0$, donc $\sqrt{x} = 2{,}4 \iff x = 2{,}4^2 = 5{,}76$: $S = \{5{,}76\}$.

$4{,}5 \geqslant 0$ et $4{,}5^2 = 20{,}25$; par croissance de la racine carrée, $\sqrt{x} \leqslant 4{,}5 \iff 0 \leqslant x \leqslant 20{,}25$: $S = [0\,;20{,}25]$.

Attention — la borne 0 ne s'oublie pas : $S = [0\,;k^2]$, jamais $]-\infty\,;k^2]$.

Cas 4 · Résoudre $x^3 = k$ ou $x^3 < k$

Réflexe — une seule solution, du signe de k ; je la trouve ou je l'encadre par deux cubes ; aucune condition sur x.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ », « Encadrer la solution ». Exemple : $x^3 = -343$ et $x^3 > 64$.

$7^3 = 49 \times 7 = 343$, donc $(-7)^3 = -343$: $S = \{-7\}$ (solution unique).
$4^3 = 64$ et la fonction cube est strictement croissante : $x^3 > 4^3 \iff x > 4$, $S =]4\,;+\infty[$.

Attention — pas de « ± » : $x^3 = 8$ n'a qu'une solution, 2.

Cas 5 · Ranger x, x², x³ et $\sqrt{x}$

Réflexe — je situe le nombre par rapport à 1 : entre 0 et 1, $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$; après 1, l'ordre s'inverse.

Exemple. Questions types : « Ranger sans calculatrice », « Position relative de deux courbes ». Exemple : $a = 0{,}55$ et $b = 3$.

$0{,}55 \in]0\,;1[$: $0{,}55^3 < 0{,}55^2 < 0{,}55 < \sqrt{0{,}55}$.
$3 > 1$: $\sqrt{3} < 3 < 3^2 < 3^3$, soit $\sqrt{3} < 3 < 9 < 27$.
Pour justifier : $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ a le signe de $x - 1$ quand $x \geqslant 0$.

Attention — « la racine réduit » est faux entre 0 et 1 : $\sqrt{0{,}55} > 0{,}55$.

Les pièges

- $\sqrt{x} = -3$ n'a pas de solution (et non x = 9).
- $\sqrt{x} \leq k$ donne $S = [0\,;k^2]$: ne pas oublier la borne 0.
- $x^3 = k$ a une seule solution : pas de « ± » comme pour x^2.
- $(-a)^3 = -a^3$: le cube d'un négatif est négatif.
- Entre 0 et 1, $\sqrt{x} > x$ et $x^3 < x$: l'ordre s'inverse après 1.
- On n'élève au carré que des membres positifs.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).