Fonctions de référence : carré, inverse et valeur absolue

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Fonctions · Fonctions de référence)

La démarche face à une fonction de référence

1. Je reconnais la fonction et son ensemble de définition : x^2 et $|x|$ sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Je place les nombres par rapport à 0 : même signe ? intervalle qui contient 0 ? C'est ce qui décide de la règle à utiliser.

3. J'applique la propriété : sens de variation sur un intervalle où la fonction est monotone, ou tableau des solutions de $f(x) = k$, $f(x) < k$.

4. Je conclus en citant la propriété (« la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc… ») et j'écris l'ensemble S avec des intervalles.

Le réflexe — la propriété citée doit porter sur un intervalle qui contient les deux nombres : sans cette vérification, la comparaison ne rapporte pas tous les points.

Cas 1 · Comparer ou encadrer avec la fonction carré

Réflexe — nombres positifs : même ordre pour les carrés ; négatifs : ordre inversé ; intervalle contenant 0 : je coupe en 0.

Exemple. Questions types : « Comparer sans calculer », « Encadrer x^2 ». Exemple : on sait que $-2{,}5 \leqslant x \leqslant -0{,}2$; encadrer x^2.

Les deux bornes sont négatives : on travaille sur $]-\infty\,;0]$.

La fonction carré y est décroissante : elle inverse l'ordre, donc $(-0{,}2)^2 \leqslant x^2 \leqslant (-2{,}5)^2$.

Conclusion : $0{,}04 \leqslant x^2 \leqslant 6{,}25$.

Attention — $-3 < 2$ ne permet pas de comparer $(-3)^2$ et 2^2 par les variations : signes contraires.

Cas 2 · Comparer ou encadrer avec la fonction inverse

Réflexe — même signe obligatoire ; la fonction inverse inverse l'ordre sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Exemple. Questions types : « Ranger des inverses », « Encadrer $\dfrac{1}{x}$ ». Exemple : on sait que $-6{,}25 \leqslant x \leqslant -2$; encadrer $\dfrac{1}{x}$.

Les bornes sont strictement négatives : x est dans $]-\infty\,;0[$.

La fonction inverse y est décroissante : $\dfrac{1}{-2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{-6{,}25}$.

Conclusion : $-0{,}5 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant -0{,}16$.

Attention — la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$: un négatif a toujours un inverse plus petit qu'un positif.

Cas 3 · Utiliser la fonction valeur absolue

Réflexe — je cherche le signe de ce qui est entre les barres : positif, je recopie ; négatif, je prends l'opposé.

Exemple. Questions types : « Écrire sans valeur absolue », « Tracer la courbe ». Exemple : $m(x) = 2|x| - 3$.

Si $x \geqslant 0$: $|x| = x$, donc $m(x) = 2x - 3$.
Si $x < 0$: $|x| = -x$, donc $m(x) = -2x - 3$.
La courbe est formée de deux demi-droites qui se rejoignent au point $(0\,;-3)$; contrôle : $m(-1{,}5) = 2 \times 1{,}5 - 3 = 0$.

Attention — pour $x < 0$, $|x| = -x$ est positif : ce n'est pas un nombre négatif.

Cas 4 · Comparer x, x² et 1/x

Réflexe — $x > 0$: je compare x à 1 ; pour démontrer, j'étudie le signe de $x^2 - x = x(x-1)$.

Exemple. Questions types : « Ranger sans calculatrice », « Démontrer que $x^2 \leqslant x$ sur $[0\,;1]$ ». Exemple : ranger $0{,}4$, $0{,}4^2$ et $\dfrac{1}{0{,}4}$.

$0 < 0{,}4 < 1$: sur $]0\,;1[$, $x^2 < x < \dfrac{1}{x}$.
Donc $0{,}4^2 < 0{,}4 < \dfrac{1}{0{,}4}$, c'est-à-dire $0{,}16 < 0{,}4 < 2{,}5$.

Attention — entre 0 et 1, le carré rend plus petit : $x^2 > x$ n'est vrai que pour $x > 1$ (ou $x < 0$).

Cas 5 · Résoudre f(x) = k ou f(x) < k

Réflexe — j'isole f(x), je regarde le signe de k ; pour $1/x$, je sépare $x < 0$ et $x > 0$.

Exemple. Questions types : « Résoudre $x^2 \geqslant k$, $|x| < k$, $\dfrac{1}{x} > k$ ». Exemple : résoudre $\dfrac{1}{x} > 0{,}25$.

Si $x < 0$: $\dfrac{1}{x} < 0$, aucune solution.
Si $x > 0$: $0{,}25 = \dfrac{1}{4}$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{4} \iff x < 4$.
Conclusion : $S =]0\,;4[$.

Attention — $x^2 = k$ a deux solutions si $k > 0$: ne pas oublier $-\sqrt{k}$.

Les pièges

- $-x^2$ et $(-x)^2$ sont différents : le premier est négatif ou nul, le second positif ou nul.
- De $a < b$ on ne déduit $a^2 < b^2$ que si a et b sont positifs.
- Encadrement contenant 0 : le minimum de x^2 (ou de $|x|$) vaut 0, pas le carré d'une borne.
- $x^2 < k$ ($k > 0$) donne $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$, pas seulement $x < \sqrt{k}$.
- $1/x < k$: ne jamais multiplier par x sans connaître son signe.
- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse : la double barre du tableau le rappelle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).