Équations

Fiche méthode

(Maths 2nde · Nombres et calculs · Équations)

La démarche pour résoudre une équation

1. Je reconnais le type : premier degré (après développement), produit nul, quotient, carré $x^2 = a$.

2. S'il y a un quotient, je donne d'abord les valeurs interdites.

3. Je transforme par équivalences : même opération sur les deux membres ; je factorise au lieu de diviser par une expression en x.

4. Je vérifie et je conclus par $S = \{\dots\}$, $S = \varnothing$ ou $S = \mathbb{R}$, sans les valeurs interdites.

Le réflexe — une résolution se termine toujours par l'ensemble S des solutions : oublier une solution, ou garder une valeur interdite, coûte des points.

Cas 1 · Premier degré

Réflexe — je développe, je regroupe les x d'un côté et les nombres de l'autre, je divise par le coefficient non nul, je vérifie.

Exemple. Questions types : « Résoudre », « Mettre le problème en équation ». Exemple : résoudre $4(x-2) = 7x + 13$.

On développe : $4x - 8 = 7x + 13$.

On regroupe : $4x - 7x = 13 + 8$, soit $-3x = 21$, donc $x = \dfrac{21}{-3} = -7$.

Vérification : $4 \times (-7 - 2) = -36$ et $7 \times (-7) + 13 = -36$. $S = \{-7\}$.

Attention — on divise par le coefficient de x (ici -3), on ne le retranche pas.

Cas 2 · Aucune solution ou tous les réels

Réflexe — les x disparaissent : je lis l'égalité qui reste entre deux nombres, vraie ($\mathrm{S} = \mathbb{R}$) ou fausse ($\mathrm{S} = \emptyset$).

Exemple. Questions types : « Résoudre », « Pour quelle valeur du paramètre… ». Exemple : résoudre $5(x+1) - 2x = 3(x+2)$.

On développe : $5x + 5 - 2x = 3x + 6$, soit $3x + 5 = 3x + 6$.

On retranche $3x$: $5 = 6$, égalité fausse quel que soit x.

Aucun réel ne convient : $S = \varnothing$.

Attention — « $0 = 0$ » donne $\mathrm{S} = \mathbb{R}$, et non $\mathrm{S} = \{0\}$.

Cas 3 · Produit nul

Réflexe — tout dans un membre, je factorise, puis un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

Exemple. Questions types : « Résoudre en factorisant ». Exemple : résoudre $(2x+5)^2 = (2x+5)(x-1)$.

Tout à gauche : $(2x+5)^2 - (2x+5)(x-1) = 0$.

Facteur commun $(2x+5)$: $(2x+5)\big[(2x+5) - (x-1)\big] = 0$, soit $(2x+5)(x+6) = 0$.

Produit nul : $2x + 5 = 0$ ou $x + 6 = 0$, donc $x = -\dfrac{5}{2}$ ou $x = -6$. $S = \left\{-6\,;\,-\dfrac{5}{2}\right\}$.

Attention — diviser par $(2x + 5)$ ferait perdre la solution $-5/2$.

Cas 4 · Quotient

Réflexe — valeurs interdites d'abord ; A/B = k devient A = kB ; je retire les valeurs interdites de S.

Exemple. Questions types : « Donner les valeurs interdites, puis résoudre ». Exemple : résoudre $\frac{x+2}{x-4} = -2$.

Valeur interdite : $x - 4 = 0$ pour $x = 4$.
Pour $x \neq 4$: $x + 2 = -2(x - 4)$, soit $x + 2 = -2x + 8$, donc $3x = 6$ et $x = 2$.
$2 \neq 4$: la valeur est autorisée. $S = \{2\}$.

Attention — une valeur interdite n'est jamais solution, même si elle annule le numérateur.

Cas 5 · Carré égal à un nombre

Réflexe — j'isole le carré, je regarde le signe du second membre ; s'il est positif, deux solutions opposées.

Exemple. Questions types : « Résoudre $x^2 = a$ », « Résoudre $(x + c)^2 = a$ ». Exemple : résoudre $(x + 3)^2 = 5$.

$5 > 0$: $x + 3 = -\sqrt{5}$ ou $x + 3 = \sqrt{5}$.
Donc $x = -3 - \sqrt{5}$ ou $x = -3 + \sqrt{5}$.
$S = \{-3 - \sqrt{5}\,;\, -3 + \sqrt{5}\}$.

Attention — $x^2 = a > 0$ a deux solutions opposées ; si $a < 0$, aucune.

Les pièges

- Diviser par x (ou par une expression en x) fait perdre des solutions : on factorise.
- La règle du produit nul ne marche que si le second membre vaut 0.
- Multiplier par une expression contenant x peut créer une solution parasite : on vérifie.
- Pour chasser les dénominateurs, on multiplie tous les termes, nombres seuls compris.
- Une racine carrée est positive : $\sqrt{169} = 13$, mais $x^2 = 169$ a deux solutions.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).