Ensembles de nombres et intervalles

Fiche méthode

(Mathématiques 2nde · Nombres et calculs · Nombres réels)

La démarche face à une question sur les nombres réels

1. Je simplifie l'écriture du nombre ou de l'expression : fraction irréductible, racine d'un carré, forme $|x-a|$.

2. Je reconnais le cas : situer un nombre, décimal ou irrationnel, encadrement, intervalle, intersection ou réunion, distance.

3. Je traduis en inégalités ou en distance, en dessinant la droite graduée si besoin.

4. Je conclus avec la bonne notation : symbole $\in$ ou $\subset$, crochets, $\varnothing$, $\approx$.

Le réflexe — une démonstration d'irrationalité ou de « non décimal » se fait par l'absurde : on suppose le contraire et on aboutit à une contradiction écrite en toutes lettres.

Cas 1 · Situer un nombre

Réflexe — je simplifie, puis je descends la chaîne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et j'annonce le plus petit ensemble.

Exemple. Questions types : « Donner le plus petit ensemble contenant… ». Exemple : $\dfrac{-45}{9}$ et $\sqrt{1{,}44}$.

$\dfrac{-45}{9} = -5$: entier négatif, donc le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.
$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ car $1{,}2^2 = 1{,}44$: décimal non entier, donc $\mathbb{D}$.

Attention — une écriture avec racine ou fraction peut cacher un entier.

Cas 2 · Décimal ? Irrationnel ?

Réflexe — fraction irréductible puis dénominateur en facteurs premiers ; pour un irrationnel, je me ramène à $\sqrt{2}$ par l'absurde.

Exemple. Questions types : « Ce nombre est-il décimal ? », « Démontrer que … est irrationnel ». Exemple : $\dfrac{26}{65}$ et $7+\sqrt{2}$.

$\dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}$ (on simplifie par 13) ; 5 seul au dénominateur : décimal, égal à 0,4.
Si $7+\sqrt{2}$ était un rationnel q, alors $\sqrt{2} = q-7$ serait rationnel, comme différence de deux rationnels : c'est faux.
Donc $7+\sqrt{2}$ est irrationnel.

Attention — on simplifie avant de regarder le dénominateur ; un affichage de calculatrice ne prouve rien.

Cas 3 · Encadrer et arrondir

Réflexe — troncature à n décimales, puis $+10^{-n}$; même opération sur les trois membres.

Exemple. Questions types : « Encadrement à 10^{-2} près », « Arrondi au centième », « En déduire un encadrement de… ». Exemple : $\sqrt{13} \approx 3{,}6055513$.

À 10^{-2} près : $3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$. Arrondi au centième : 3,61 (décimale suivante : 5).
On multiplie par 2, positif : $7{,}20 < 2\sqrt{13} < 7{,}22$, amplitude 0,02.

Attention — troncature et arrondi peuvent différer ; l'amplitude est multipliée elle aussi.

Cas 4 · Écrire un intervalle

Réflexe — large → fermé, stricte → ouvert, infini → ouvert ; plus petite borne à gauche.

Exemple. Questions types : « Traduire par un intervalle », « Ce nombre appartient-il à… ? ». Exemple : $x > -3$ et $x \leqslant 0{,}5$.

Les deux conditions ensemble : $-3 < x \leqslant 0{,}5$, soit $x \in]-3\,;0{,}5]$.
Ses entiers sont -2, -1 et 0 : -3 est exclu.

Attention — [a ; +∞] n'existe pas.

Cas 5 · Intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien

Réflexe — deux droites l'une sous l'autre, puis borne par borne.

Exemple. Questions types : « Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$ ». Exemple : $A = [-4\,;3[$ et $B = [1\,;6]$.

Zone commune de 1 à 3 : $A \cap B = [1\,;3[$ (3 est exclu de A).
Zone couverte : $A \cup B = [-4\,;6]$.
$\overline{A} =]-\infty\,;-4[\cup [3\,;+\infty[$.

Attention — intersection vide : $\emptyset$, pas 0 ; produit cartésien : Card(A × B) = Card(A) × Card(B), et l'ordre du couple compte.

Cas 6 · Valeur absolue et distance

Réflexe — forme |x − a|, lecture « distance de x à a », puis r de chaque côté de a.

Exemple. Questions types : « Résoudre $|x-a| \leqslant r$ », « Écrire l'intervalle sous la forme $|x-a| \leqslant r$ ». Exemple : $|x+2| \leqslant 3$.

$|x+2| = |x-(-2)|$: la distance de x à -2 est au plus 3.
Les bornes sont $-2-3=-5$ et $-2+3=1$, incluses : $S = [-5\,;1]$.

Attention — |x + 2| : centre −2, pas 2.

Les pièges

- Confondre ∈ (un élément) et ⊂ (un ensemble).
- Conclure « irrationnel » pour $\sqrt{49} = 7$: on simplifie d'abord.
- Écrire $\sqrt{2} = 1{,}41$ au lieu de $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.
- Fermer le crochet devant $+\infty$ ou $-\infty$.
- Recoller $]-\infty\,;-1] \cup [2\,;+\infty[$ en un seul intervalle.
- Oublier une solution de |x − a| = r : il y en a deux.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).