

Corrigé et barème – Ensembles de nombres et intervalles

Naturels, entiers, rationnels, irrationnels, réels et intervalles : les fondations du calcul en seconde générale

Durée : 90 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Ensembles de nombres

(4 pts)

- $\frac{-84}{12} = -7$: c'est un entier négatif, donc le plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$. (1)
- $80 = 2^4 \times 5$ ne contient que des 2 et des 5, et la fraction est irréductible : oui, $\frac{17}{80} = 0,2125$ est décimal. (1)
- $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; si ce nombre était rationnel, $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{72}}{6}$ le serait aussi, ce qui est faux : il est irrationnel. (1)
- Par exemple $\frac{5}{6}$ (dénominateur divisible par 3) appartient à $\mathbb{Q}$ sans être décimal, et $0,7$ appartient à $\mathbb{D}$ sans être entier. (1)

Le point clé — On simplifie toujours l'écriture avant de conclure : le plus petit ensemble se lit sur la forme réduite, jamais sur l'écriture de départ.

Exercice 2 – Intervalles

(4 pts)

- $A \cap B = [0 ; 2]$: la zone commune va de 0, inclus dans B et dans A , à 2, inclus dans A . (1)
- $A \cup B =] - 5 ; 9[$: les deux intervalles se chevauchent entre 0 et 2, la réunion est donc un intervalle. (1)
- Le complémentaire est $] - \infty ; -5] \cup]2 ; +\infty[$: inégalités et crochets sont inversés. (1)
- $A \cap [3 ; 9[= \emptyset$: tout élément de A est inférieur ou égal à 2, donc strictement inférieur à 3. (1)

Repère — Chaque borne se traite séparément : elle n'appartient au résultat que si elle appartient bien aux deux ensembles pour une intersection.

Exercice 3 – Valeur absolue et distance

(4 pts)

- $3 - 14 = -11$ donc $|3 - 14| = 11$; $14 - 3 = 11$ donc $|14 - 3| = 11$: les deux distances sont égales. (1)
- $x - 6 = 11$ ou $x - 6 = -11$, donc $x = 17$ ou $x = -5$: $S = \{-5 ; 17\}$. (1)
- La distance de x à -3 est strictement inférieure à 7, donc $S =] - 10 ; 4[$, bornes exclues. (1)
- Le centre est $\frac{-8+16}{2} = 4$ et le rayon $\frac{16-(-8)}{2} = 12$, d'où $|x - 4| \leq 12$. (1)

Attention — Une écriture $|x + 3|$ doit d'abord se transformer en $|x - (-3)|$: le centre est -3 et non 3.

Exercice 4 – Raisonnement et logique

(4 pts)

- La contraposée est : « si $x^2 \leq 4$, alors $x \notin]2 ; +\infty[$ » ; on nie les deux propositions et on les échange. (1)
- Oui : si $x > 2 > 0$, la fonction carré étant croissante sur les nombres positifs, $x^2 > 2^2 = 4$. (1)
- La réciproque « si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ » est fausse : pour $x = -9$, $x^2 = 81 > 4$ mais $-9 < 2$. (1)
- C'est faux dès que x est négatif : $|-6| = 6$ et non -6 . La définition correcte est $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$. (1)

Erreur fréquente — Confondre réciproque et contraposée coûte cher : la contraposée est toujours vraie en même temps que l'implication, la réciproque presque jamais automatiquement.

Exercice 5 – Calibrage d’une balance de précision*(4 pts)*

- a) $|m - 250| \leq 1,2$, soit l’intervalle de centre 250 et de rayon 1,2 : $[248,8 ; 251,2]$. (1)
- b) $|248,9 - 250| = 1,1 \leq 1,2$ conforme ; $|251,3 - 250| = 1,3 > 1,2$ non conforme ; $|250,7 - 250| = 0,7 \leq 1,2$ conforme. (1)
- c) Nouvel intervalle $[249,2 ; 250,8]$: les écarts 1,1 et 1,3 dépassent 0,8, seul le contrôle à 250,7 g reste conforme. (1)
- d) Si $|m - 250| \leq 0,8$ alors, comme $0,8 \leq 1,2$, on a $|m - 250| \leq 1,2$: donc $[249,2 ; 250,8] \subset [248,8 ; 251,2]$. (1)

À retenir — Resserrer une tolérance revient à réduire le rayon : le nouvel intervalle est inclus dans l’ancien, jamais l’inverse.