Loi des grands nombres et simulation

Fiche méthode

(Maths 2nde · Statistiques et probabilités · Loi des grands nombres)

La démarche face à une question de hasard

1. Je trie les nombres : probabilité (calculée sur le modèle) ou fréquence (comptée sur des résultats réels) ; effectif k et taille n.

2. Je calcule $f = \dfrac{k}{n}$, la probabilité p du modèle s'il y en a un, puis l'écart $|f - p|$.

3. Je regarde la taille n : petite, la fréquence peut fluctuer beaucoup ; grande, elle est proche de p sauf exception.

4. Je conclus par une phrase : fluctuation normale, loi des grands nombres, estimation $p \approx f$, ou doute sur le modèle.

Le réflexe — une fréquence ne « prouve » jamais une probabilité : on écrit « proche », « environ », « on peut douter », jamais « égal » ni « prouvé ».

Cas 1 · Probabilité ou fréquence

Réflexe — calcul sur le modèle → probabilité ; comptage de résultats réels → fréquence $f = \dfrac{k}{n}$.

Exemple. Questions types : « Calculer la probabilité », « Calculer la fréquence observée et l'écart ». Exemple : un sac contient 5 jetons dont 2 jaunes ; sur 150 tirages au hasard avec remise, le jaune sort 54 fois.

Modèle : $p = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

Réalité : $f = \dfrac{54}{150} = 0{,}36$.

Écart : $|0{,}36 - 0{,}4| = 0{,}04$.

Attention — 54 est un effectif ; la fréquence est 54 divisé par 150.

Cas 2 · Échantillon et fluctuation

Réflexe — je repère la taille n et le nombre de succès de chaque échantillon, puis je compare les fréquences.

Exemple. Questions types : « Donner la taille de l'échantillon », « Nommer le phénomène ». Exemple : deux échantillons de 40 tirages avec remise dans la même urne donnent 13 puis 19 boules blanches.

$f_1 = \dfrac{13}{40} = 0{,}325$ et $f_2 = \dfrac{19}{40} = 0{,}475$.

Même urne, même taille, fréquences différentes : c'est la fluctuation d'échantillonnage.

Aucun des deux résultats n'est faux.

Attention — le hasard n'a pas de mémoire : après plusieurs échecs, la probabilité de succès ne change pas.

Cas 3 · Loi des grands nombres

Réflexe — j'écris l'énoncé exact, puis je compare les écarts $|f - p|$ quand n grandit.

Exemple. Questions types : « Quelle propriété ces résultats illustrent-ils ? », « L'écart en nombre a grandi : est-ce une contradiction ? ». Exemple : 50 000 lancers d'une pièce équilibrée, 25 120 piles.

Écart en nombre : $25\,120 - 25\,000 = 120$.

Fréquence : $\dfrac{25\,120}{50\,000} = 0{,}5024$, écart $0{,}0024$.

L'écart en nombre est grand, mais la fréquence est proche de 0,5 : c'est ce que dit la loi des grands nombres.

Attention — la loi ne parle que de la fréquence, et seulement pour n grand.

Cas 4 · Estimer une probabilité

Réflexe — je regroupe les données, $p \approx \dfrac{\text{total des succès}}{\text{total des répétitions}}$, puis $N \times p$ pour prévoir.

Exemple. Questions types : « Proposer une valeur approchée de p », « Combien de succès peut-on prévoir ? ».
Exemple : un gobelet lancé 2 500 fois tombe 1 715 fois sur le côté.

$f = \dfrac{1\,715}{2\,500} = 0{,}686$: grand échantillon, donc $p \approx 0{,}686$.
Sur 200 lancers, on attend environ $200 \times 0{,}686 = 137{,}2$, soit à peu près 137 chutes sur le côté.

Attention — on ne fait pas la moyenne des fréquences de séries de tailles différentes.

Cas 5 · Simulation en Python

Réflexe — `random() < p` = succès ; compteur dans la boucle ; `return` après la boucle.

Exemple. Questions types : « Que représente la variable ? », « Que renvoie la fonction ? », « Compléter le test ».
Exemple : une joueuse marque un tir au but avec la probabilité 0,8.

```
from random import random

def tirs(n):
    buts = 0
    for t in range(n):
        if random() < 0.8:
            buts = buts + 1
    return buts / n
```

`buts` compte les buts sur n tirs ; la fonction renvoie leur fréquence, proche de 0,8 quand n est grand.

Attention — `random() > 0.8` serait vrai avec la probabilité $1 - 0{,}8$, pas 0,8.

Les pièges

- Confondre fréquence et probabilité : f change à chaque échantillon, p est fixe.
- Confondre effectif et fréquence : 54 succès n'est pas une fréquence, $\dfrac{54}{150}$ en est une.
- Croire à la compensation : une pièce qui a donné plusieurs faces n'a pas « plus de chances » de donner pile.
- Appliquer la loi des grands nombres à 10 lancers : elle ne dit rien pour un petit échantillon.
- Regrouper des séries en faisant la moyenne de leurs fréquences au lieu du total des succès divisé par le total des répétitions.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).