

Devoir surveillé – Échantillonnage et loi des grands nombres

Échantillon, fluctuation d'échantillonnage, fréquence et probabilité, loi des grands nombres (approche expérimentale), simulation en Python, proportion d'échantillons dont la fréquence est proche de p

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Vocabulaire et fréquence (4 pts)

- a) Dans une ville, on interroge au hasard 250 habitants : 95 utilisent le tram chaque semaine. Préciser la population, le caractère étudié et la taille de l'échantillon.
- b) Calculer la fréquence observée f .
- c) Un second échantillon de 250 habitants donne une fréquence de 0,412. Nommer ce phénomène et l'expliquer en une phrase.
- d) Énoncer la loi des grands nombres (approche expérimentale).

Exercice 2 – Intervalle et décision (4 pts)

- a) On suppose $p = 0,55$ et $n = 484$. Calculer $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (arrondi au dix-millième).
- b) Donner l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ (bornes au dix-millième).
- c) Un échantillon de taille 484 a pour fréquence 0,49. Conclure.
- d) Un autre échantillon de taille 484 compte 281 succès. Conclure.

Exercice 3 – Taille d'échantillon (4 pts)

- a) Déterminer le plus petit entier n tel que $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,03$.
- b) Calculer la valeur exacte de $\frac{1}{\sqrt{196}}$, puis son arrondi au dix-millième.
- c) Montrer que si l'on multiplie n par k^2 (k entier, $k \geq 1$), alors $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divisé par k .
- d) Expliquer l'erreur : « avec deux fois plus de personnes interrogées, l'intervalle est deux fois plus étroit ».

Exercice 4 – Simulation en Python

(4 pts)

- a) On considère la fonction ci-dessous. Que renvoie $f(n, p)$?

```
from random import random

def f(n, p):
    s = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            s = s + 1
    return s / n
```

- b) Écrire l'appel qui simule 700 répétitions d'une expérience de probabilité de succès 0,2.
- c) Écrire une fonction `dedans(n, p)` qui simule un échantillon et renvoie `True` si sa fréquence vérifie $|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, `False` sinon.
- d) On exécute 600 fois `dedans(700, 0.2)` et on obtient 571 fois `True`. Interpréter.

Exercice 5 – La roulette du casino

(4 pts)

- a) Une roulette comporte 37 cases équiprobables, dont 18 rouges. Donner la probabilité p d'obtenir rouge (fraction, puis arrondi au dix-millième).
- b) Pour $n = 1\,369$ lancers, montrer que l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est égal à $\left[\frac{17}{37}; \frac{19}{37}\right]$.
- c) On observe 721 rouges sur 1 369 lancers. Conclure.
- d) Déterminer tous les nombres k de rouges, sur 1 369 lancers, compatibles avec p .

Bon courage !