

Corrigé et barème – Échantillonnage et loi des grands nombres

Échantillon, fluctuation d'échantillonnage, fréquence et probabilité, loi des grands nombres (approche expérimentale), simulation en Python, proportion d'échantillons dont la fréquence est proche de p

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Exercice 1 – Vocabulaire et fréquence

(4 pts)

- a) Population : les habitants de la ville ; caractère : « utiliser le tram chaque semaine » ; taille $n = 250$. (1)
- b) $f = \frac{95}{250} = 0,38$. (1)
- c) Fluctuation d'échantillonnage : la fréquence varie d'un échantillon à l'autre, même de même taille. (1)
- d) Quand n devient grand, la fréquence observée se stabilise autour de la probabilité p . (1)

Repère — La fréquence dépend de l'échantillon, la probabilité (ou la proportion dans la population) n'en dépend pas.

Exercice 2 – Intervalle et décision

(4 pts)

- a) $\sqrt{484} = 22$, donc $\frac{1}{22} \approx 0,0455$. (1)
- b) $[0,55 - \frac{1}{22}; 0,55 + \frac{1}{22}] \approx [0,5045; 0,5955]$. (1)
- c) $0,49 < 0,5045$: hors de l'intervalle, on met en doute $p = 0,55$ (risque $\approx 5\%$). (1)
- d) $f = \frac{281}{484} \approx 0,5806 \in [0,5045; 0,5955]$: compatible avec $p = 0,55$ (sans preuve). (1)

Erreur fréquente — Écrire « p est faux » au lieu de « on met en doute p , avec un risque d'erreur d'environ 5% ».

Exercice 3 – Taille d'échantillon

(4 pts)

- a) $\sqrt{n} \geq \frac{1}{0,03} \approx 33,33$, donc $n \geq 1\,111,1 : n = 1\,112$ (car $\frac{1}{\sqrt{1\,111}} \approx 0,030\,001 > 0,03$). (1)
- b) $\sqrt{196} = 14 : \frac{1}{14} \approx 0,0714$. (1)
- c) $\frac{1}{\sqrt{k^2 n}} = \frac{1}{k\sqrt{n}} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ (car $k > 0$) : divisé par k . (1)
- d) La largeur est $\frac{2}{\sqrt{n}}$: doubler n la divise par $\sqrt{2} \approx 1,41$; pour la diviser par 2, il faut multiplier n par 4. (1)

À retenir — La précision progresse comme $\sqrt{n}$: gagner un facteur 2 coûte un échantillon 4 fois plus grand.

Exercice 4 – Simulation en Python

(4 pts)

- a) La fréquence des succès dans un échantillon simulé de taille n (le test `random() < p` est vrai avec probabilité p). (1)
- b) `f(700, 0.2)`. (1)
- c) `from math import sqrt; def dedans(n, p): puis return abs(f(n, p) - p) <= 1 / sqrt(n)`. (1)
- d) $\frac{571}{600} \approx 0,952$: environ 95% des échantillons ont une fréquence à moins de $\frac{1}{\sqrt{700}} \approx 0,038$ de $0,2$, conforme au cours. (1)

Astuce — Le test `random() < p` est vrai avec la probabilité p : c'est la brique de base de toute simulation d'échantillon.

Exercice 5 – La roulette du casino*(4 pts)*

a) $p = \frac{18}{37} \approx 0,4865$. (1)

b) $\sqrt{1\,369} = 37 : \frac{18}{37} - \frac{1}{37} = \frac{17}{37}$ et $\frac{18}{37} + \frac{1}{37} = \frac{19}{37}$. (1)

c) $f = \frac{721}{1\,369} \approx 0,5267 > \frac{19}{37} \approx 0,5135$: on met en doute l'équilibre de la roulette (risque $\approx 5\%$). (1)

d) $1\,369 \times \frac{17}{37} = 629$ et $1\,369 \times \frac{19}{37} = 703$: compatible si et seulement si $629 \leq k \leq 703$. (1)

Le point clé — Travailler avec des fractions donne des bornes exactes et évite les erreurs d'arrondi près des bornes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).