

Devoir surveillé – Vecteurs, géométrie dans le plan repéré et équations de droites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2^{nde}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer — Une diagonale et une médiane

(4 pts)

$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[CD]$ et E le point tel que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AI}$. a) Exprimer $\vec{AI}$ puis $\vec{AE}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD})$.

- Démontrer que les points B , E et D sont alignés et préciser la position de E sur $[BD]$.
- Généralisation : M est le point tel que $\vec{AM} = k\vec{AI}$, avec k réel. Démontrer que M appartient à (BD) si et seulement si $k = \frac{2}{3}$.
- Contrôle : dans un repère orthonormé, $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ et $D(2; 3)$. Calculer les coordonnées de C , I et E , puis vérifier que E appartient à la droite (BD) à l'aide de son équation réduite.

Exercice 2 – Une famille de systèmes

(4 pts)

Pour tout réel m , on considère le système $(S_m) : \begin{cases} mx + 2y = 4 \\ 2x + my = m + 2 \end{cases}$ et les droites d_m et d'_m associées à ses deux équations. a) Donner un vecteur directeur de d_m et de d'_m , puis démontrer que ces droites sont sécantes si et seulement si $m \neq 2$ et $m \neq -2$.

- Étudier les cas $m = 2$ et $m = -2$: préciser la position des droites et l'ensemble des solutions de (S_m) .
- On suppose $m \neq 2$ et $m \neq -2$. Résoudre (S_m) et montrer que sa solution est $\left(\frac{2}{m+2}; \frac{m+4}{m+2}\right)$.
- Démontrer que tous les points d'intersection M_m obtenus en c) sont sur une même droite Δ , dont on donnera l'équation réduite.
- Recherche : quels points de Δ sont effectivement obtenus comme point M_m ? Justifier.

Exercice 3 – Démontrer — Le quadrilatère des milieux

(4 pts)

- A, B, C sont trois points, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. Démontrer que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
- $ABCD$ est un quadrilatère quelconque et I, J, K, L sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme.
- Dans un repère orthonormé, $A(-4; 1)$, $B(2; -3)$, $C(6; 5)$ et $D(-2; 7)$. Calculer les coordonnées de I, J, K, L et vérifier le résultat de b).
- Déterminer la nature précise de $IJKL$ dans ce cas.
- Recherche : quelle condition sur les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de $ABCD$ garantit que $IJKL$ est un losange ? Justifier.

Exercice 4 – Problème — Le plus court chemin par la rivière*(4 pts)*

Dans un repère orthonormé d'unité 100 m, une rivière suit l'axe des abscisses. Une randonneuse part de $A(1; 3)$, doit remplir sa gourde en un point M de la rivière, puis rejoindre son refuge $B(7; 5)$. On note $A'(1; -3)$. a) Démontrer que, pour tout point M de l'axe des abscisses, $AM = A'M$.

- a) En déduire que $AM + MB \geq A'B$, et préciser pour quels points M il y a égalité.
- b) Déterminer les coordonnées du point M_0 qui rend le trajet $AM + MB$ le plus court possible.
- c) Calculer AM_0 et M_0B , puis la longueur minimale du trajet en mètres.
- d) Un raccourci intuitif consiste à viser le point $N(4; 0)$. Combien de mètres ce choix fait-il perdre, à l'unité près ?

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Aire et déterminant*(4 pts)*

Dans un repère orthonormé d'origine O , on considère $U(a; b)$ et $V(c; d)$. a) Cas numérique : $U(6; 2)$ et $V(2; 5)$. Calculer l'aire du triangle OUV en retranchant trois triangles rectangles au rectangle de sommets $O, (6; 0), (6; 5), (0; 5)$, et la comparer à $\det(\vec{OU}, \vec{OV})$.

- a) Démontrer que, si \$0
- b) On admet que, dans tous les cas, l'aire d'un triangle ABC vaut $\frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC})|}{2}$. Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(-2; -1), B(3; 1)$ et $C(0; 4)$.
- c) Déterminer les points M de l'axe des abscisses tels que l'aire du triangle ABM soit égale à 10.
- d) Pour un réel k , montrer que l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = k$ est une droite parallèle à (AB) . Interpréter le résultat de d).

Bon courage !