

# Corrigé et barème – Vecteurs, géométrie dans le plan repéré et équations de droites — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2<sup>nde</sup>

## Exercice 1 – Démontrer — Une diagonale et une médiane

(4 pts)

- a)  $\vec{AI} = \vec{AD} + \vec{DI} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$  (car  $\vec{DC} = \vec{AB}$ ). Donc  $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}$ . (0,5 pt) (1)
- b)  $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = -\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}(\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{BD}$ . Les vecteurs  $\vec{BE}$  et  $\vec{BD}$  sont colinéaires :  $B, E, D$  sont alignés, et  $E$  est sur  $[BD]$  aux deux tiers en partant de  $B$ . (1,5 pt) (1)
- c)  $\vec{AM} = \frac{k}{2}\vec{AB} + k\vec{AD}$ , donc  $\vec{BM} = \left(\frac{k}{2} - 1\right)\vec{AB} + k\vec{AD}$ , et  $\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD}$ .  $M \in (BD) \iff$  il existe  $\lambda$  avec  $\vec{BM} = \lambda\vec{BD}$  ; par unicité de la décomposition :  $\frac{k}{2} - 1 = -\lambda$  et  $k = \lambda$ , donc  $\frac{k}{2} - 1 = -k \iff \frac{3k}{2} = 1 \iff k = \frac{2}{3}$ . Réciproquement,  $k = \frac{2}{3}$  donne  $\vec{BM} = \frac{2}{3}\vec{BD}$ . (1 pt) (1)
- d)  $\vec{DC} = \vec{AB}$  donne  $C(8; 3)$  ;  $I(5; 3)$  ;  $\vec{AE} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ , donc  $E\left(\frac{10}{3}; 2\right)$ .  $(BD) : m = \frac{3-0}{2-6} = -\frac{3}{4}, y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ . Pour  $x = \frac{10}{3} : -\frac{10}{4} + \frac{9}{2} = \frac{-5+9}{2} = 2 = y_E \checkmark$ . (1 pt) (1)

**Méthode** — Pour démontrer un alignement sans repère, on exprime tous les vecteurs dans une même base, puis on cherche un coefficient de proportionnalité ; l'unicité de la décomposition fait le reste.

## Exercice 2 – Une famille de systèmes

(4 pts)

- a)  $d_m : mx + 2y - 4 = 0$  est dirigée par  $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ m \end{pmatrix}$  et  $d'_m : 2x + my - (m+2) = 0$  par  $\vec{v}\begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$ .  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-2) \times 2 - m \times (-m) = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$ . Les droites sont sécantes  $\iff \vec{u}, \vec{v}$  non colinéaires  $\iff m^2 - 4 \neq 0 \iff m \neq 2$  et  $m \neq -2$ . (1 pt) (0,8)
- b)  $m = 2$  : les deux équations s'écrivent  $2x + 2y = 4$  ; droites confondues ( $y = -x + 2$ ), infinité de solutions : tous les couples  $(x; 2-x)$ .  $m = -2 : -2x + 2y = 4 \iff y = x + 2$  et  $2x - 2y = 0 \iff y = x$  ; même coefficient directeur, ordonnées à l'origine différentes : droites strictement parallèles, aucune solution. (1 pt) (0,8)
- c) On multiplie la 1re équation par  $m$  et la 2e par 2 :  $m^2x + 2my = 4m$  et  $4x + 2my = 2m + 4$ . Par soustraction :  $(m^2 - 4)x = 2m - 4 = 2(m-2)$ , d'où  $x = \frac{2(m-2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{2}{m+2}$ . Puis  $2y = 4 - \frac{2m}{m+2} = \frac{4m+8-2m}{m+2} = \frac{2m+8}{m+2}$ , donc  $y = \frac{m+4}{m+2}$ . (1 pt) (0,8)
- d)  $y = \frac{m+2+2}{m+2} = 1 + \frac{2}{m+2} = 1 + x$  : tous les  $M_m$  sont sur  $\Delta : y = x + 1$ . (0,5 pt) (0,8)
- e) Un point de  $\Delta$  d'abscisse  $x$  est un  $M_m$  si et seulement si  $x = \frac{2}{m+2}$  avec  $m \neq \pm 2$ . On a toujours  $x \neq 0$  ; pour  $x \neq 0$ ,  $m = \frac{2}{x} - 2$ , qui vaut  $-2$  jamais et vaut 2 exactement quand  $x = \frac{1}{2}$ . Tous les points de  $\Delta$  sont obtenus sauf  $(0; 1)$  et  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ . (0,5 pt) (0,8)

**Piège** — On ne divise par  $m^2 - 4$  qu'après avoir traité à part les valeurs qui l'annulent : ce sont justement elles qui donnent les cas « aucune solution » et « infinité de solutions ».

**Exercice 3 – Démontrer — Le quadrilatère des milieux**

(4 pts)

- a)  $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC}$ . (1 pt) (0,8)
- b) D'après a) dans le triangle  $ABC$  :  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$  ; dans le triangle  $ADC$  avec les milieux  $L$  de  $[AD]$  et  $K$  de  $[DC]$  :  $\vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ . Donc  $\vec{IJ} = \vec{LK}$  :  $IJKL$  est un parallélogramme. (0,5 pt) (0,8)
- c)  $I(-1; -1), J(4; 1), K(2; 6), L(-3; 4)$ .  $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{LK} \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  :  $\vec{IJ} = \vec{LK}$  ✓. (1 pt) (0,8)
- d)  $IJ^2 = 25 + 4 = 29$  ;  $\vec{JK} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  :  $JK^2 = 4 + 25 = 29$  ;  $\vec{IK} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  :  $IK^2 = 9 + 49 = 58 = IJ^2 + JK^2$ .  
Réciproque de Pythagore : angle droit en  $J$  ; parallélogramme avec un angle droit et deux côtés consécutifs égaux :  $IJKL$  est un carré. (1 pt) (0,8)
- e)  $IJ = \frac{1}{2}AC$  et, de même dans le triangle  $BCD$ ,  $JK = \frac{1}{2}BD$ . Le parallélogramme  $IJKL$  est un losange  $\iff IJ = JK \iff AC = BD$  : il faut et il suffit que les diagonales de  $ABCD$  aient la même longueur. (0,5 pt) (0,8)

**Astuce** — Les côtés du quadrilatère des milieux sont des moitiés des diagonales : toute propriété de  $IJKL$  se traduit en une propriété des diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$ .

**Exercice 4 – Problème — Le plus court chemin par la rivière**

(4 pts)

- a)  $M(x; 0) : AM^2 = (x-1)^2 + (0-3)^2 = (x-1)^2 + 9$  et  $A'M^2 = (x-1)^2 + (0+3)^2 = (x-1)^2 + 9$ . Des distances positives de même carré sont égales :  $AM = A'M$ . (0,5 pt) (0,8)
- b)  $AM + MB = A'M + MB \geq A'B$  par l'inégalité triangulaire, avec égalité si et seulement si  $M \in [A'B]$ .  $A'$  est sous l'axe et  $B$  au-dessus :  $[A'B]$  coupe bien l'axe, en un unique point. (1 pt) (0,8)
- c)  $(A'B) : m = \frac{5 - (-3)}{7 - 1} = \frac{4}{3}$ ,  $y = \frac{4}{3}x + p$  avec  $-3 = \frac{4}{3} + p$ , donc  $p = -\frac{13}{3}$  :  $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$ .  $y = 0 \iff 4x = 13 \iff x = \frac{13}{4}$  :  $M_0 \left( \frac{13}{4}; 0 \right)$ , et  $1 < \frac{13}{4} < 7$  donc  $M_0 \in [A'B]$ . (1,5 pt) (0,8)
- d)  $AM_0 = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{81 + 144}{16}} = \frac{15}{4}$  ;  $M_0B = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{225 + 400}{16}} = \frac{25}{4}$ . Total  $\frac{40}{4} = 10$  unités =  $A'B = \sqrt{36 + 64}$  ✓, soit 1 000 m. (0,5 pt) (0,8)
- e)  $AN = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4,243$  et  $NB = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5,831$  ; total  $\approx 10,074$  unités, soit environ 1 007 m : ce raccourci fait perdre environ 7 m. (0,5 pt) (0,8)

**Astuce** — Le symétrique d'un point par rapport à la rivière transforme une ligne brisée en une ligne droite : minimiser la somme revient alors à aligner trois points.

**Exercice 5 – Pour aller plus loin — Aire et déterminant****(4 pts)**

- a) Rectangle :  $6 \times 5 = 30$ . Triangles retirés :  $\frac{6 \times 2}{2} = 6$  (sous  $OU$ ),  $\frac{(6-2)(5-2)}{2} = 6$  (entre  $U$  et  $V$ ),  $\frac{2 \times 5}{2} = 5$  (à gauche de  $OV$ ). Aire =  $30 - 17 = 13$ .  $\det = 6 \times 5 - 2 \times 2 = 26$  : l'aire vaut la moitié du déterminant. (0,5 pt) (0,8)
- b) Rectangle  $[0; a] \times [0; d]$  d'aire  $ad$ . On retire  $\frac{ab}{2}$ ,  $\frac{(a-c)(d-b)}{2}$  et  $\frac{cd}{2}$ . Aire =  $ad - \frac{ab + (ad - ab - cd + bc) + cd}{2} = ad - \frac{ad + bc}{2} = \frac{ad - bc}{2}$ . (1,5 pt) (0,8)
- c)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ;  $\det = 5 \times 5 - 2 \times 2 = 21$ , aire =  $\frac{21}{2} = 10,5$  (unités d'aire). (0,5 pt) (0,8)
- d)  $M(x; 0) : \vec{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 5 \times 1 - 2(x+2) = 1 - 2x$ .  $\frac{|1-2x|}{2} = 10 \iff 1-2x = 20$  ou  $1-2x = -20 \iff x = -\frac{19}{2}$  ou  $x = \frac{21}{2}$ . Deux points :  $\left(-\frac{19}{2}; 0\right)$  et  $\left(\frac{21}{2}; 0\right)$ . (1 pt) (0,8)
- e)  $\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 5(y+1) - 2(x+2) = -2x + 5y + 1$ . L'ensemble cherché a pour équation  $-2x + 5y + 1 - k = 0$  : c'est une droite de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$ , donc parallèle à  $(AB)$ . En d), les points  $M$  sont les intersections de l'axe des abscisses avec les deux parallèles à  $(AB)$  obtenues pour  $k = 20$  et  $k = -20$  (même base  $AB$ , même hauteur). (0,5 pt) (0,8)

**Erreur fréquente** — Le déterminant peut être négatif selon l'ordre des vecteurs : une aire s'obtient avec sa valeur absolue, et l'équation « aire = 10 » donne alors deux cas.