

Corrigé et barème – Vecteurs, géométrie dans le plan repéré et équations de droites — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 2nde

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$ (relation de Chasles). (0,5 pt) (0,75)
- b) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (-4) \times k - 6 \times 6 = -4k - 36 = 0 \iff k = -9$. Alors $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, soit $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{u}$. (1 pt) (0,75)
- c) $3y = -2x + 6 \iff y = -\frac{2}{3}x + 2$: coefficient directeur $-\frac{2}{3}$; vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1 pt) (0,75)
- d) $y = -3x + p$ avec $-2 = -3 \times 1 + p$, donc $p = 1$: $y = -3x + 1$. (0,5 pt) (0,75)

Piège — Dans une somme de vecteurs, on transforme d'abord chaque soustraction : $-\vec{CB} = \vec{BC}$; la relation de Chasles ne s'applique qu'aux vecteurs mis bout à bout.

Exercice 2 – Médianes d'un triangle

(4 pts)

- a) $I \left(\frac{5+1}{2}; \frac{3+7}{2} \right) = (3; 5)$ et $J \left(\frac{-3+1}{2}; \frac{-1+7}{2} \right) = (-1; 3)$. (0,5 pt) (0,8)
- b) $m = \frac{5 - (-1)}{3 - (-3)} = 1$; $y = x + p$ avec $-1 = -3 + p$, donc $p = 2$: $(AI) : y = x + 2$ (vérification : $3 + 2 = 5$). (1 pt) (0,8)
- c) B et J ont la même ordonnée 3 : (BJ) est horizontale, d'équation $y = 3$. (0,5 pt) (0,8)
- d) $y = 3$ et $y = x + 2$ donnent $x = 1$: $G(1; 3)$. $\vec{AG} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AI} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$. (1 pt) (0,8)
- e) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$: $AB = \sqrt{80}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$: $AC = \sqrt{80}$. Donc $AB = AC$: ABC est isocèle en A . A est équidistant de B et C , et I aussi (milieu) : A et I sont sur la médiatrice de $[BC]$, donc (AI) est la médiatrice de $[BC]$. (1 pt) (0,8)

Méthode — Pour trouver l'intersection de deux droites, on commence par celle dont l'équation est la plus simple (horizontale ou verticale) : la substitution devient immédiate.

Exercice 3 – Alignement dans une base

(4 pts)

- a) $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$. (0,5 pt) (0,8)
- b) $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BF} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AB} + t(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{2}{3}\vec{AB} - t\vec{AB} + t\vec{AC} = \left(\frac{2}{3} - t\right)\vec{AB} + t\vec{AC}$. (1 pt) (0,8)
- c) D, E, F alignés $\iff$ il existe λ tel que $\vec{DF} = \lambda\vec{DE}$. $(\vec{AB}, \vec{AC})$ étant une base, la décomposition est unique : $\frac{2}{3} - t = -\frac{\lambda}{3}$ et $t = \frac{\lambda}{2}$. Donc $\lambda = 2t$ et $\frac{2}{3} - t = -\frac{2t}{3}$, d'où $\frac{2}{3} = \frac{t}{3}$, soit $t = 2$. (1 pt) (0,8)
- d) $t = 2, \lambda = 4$: $\vec{DF} = -\frac{4}{3}\vec{AB} + 2\vec{AC} = 4\vec{DE}$. $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont de même sens et $DE = \frac{1}{4}DF$: E est sur $[DF]$, au quart de D vers F . (0,5 pt) (0,8)
- e) $D(2; 0), E(1; 2); \vec{BC}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ donc $F = B + 2\vec{BC}$, soit $F(-2; 8)$. $(DE) : m = \frac{2-0}{1-2} = -2, y = -2x + 4$. Pour $F : -2 \times (-2) + 4 = 8 = y_F : F \in (DE)$. (1 pt) (0,8)

Astuce — L'unicité de la décomposition dans une base permet d'identifier les coefficients : une égalité vectorielle devient un système de deux équations.

Exercice 4 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. $6y = 4x + 1 \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$: même coefficient directeur $\frac{2}{3}$ que d' , ordonnées à l'origine différentes ; les droites sont strictement parallèles. (1 pt) (0,8)
- b) Vrai. $\vec{MP}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) : MP = \sqrt{9+16} = 5 ; \vec{MQ}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) : MQ = \sqrt{16+9} = 5$. M est équidistant de P et Q , donc il est sur la médiatrice de $[PQ]$. (1 pt) (0,8)
- c) Vrai. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$. (0,5 pt) (0,8)
- d) Faux. En multipliant la 1re équation par -3 : $-6x + 3y = -9$, incompatible avec $-6x + 3y = 1$. Aucune solution : les droites sont strictement parallèles. (1 pt) (0,8)
- e) Faux. R et S ont la même abscisse -2 : la droite est verticale, d'équation $x = -2$. (0,5 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Confondre $x = -2$ et $y = -2$: une droite verticale n'a pas d'équation réduite de la forme $y = mx + p$, on la repère à l'abscisse commune de ses points.

Exercice 5 – Problème — Course d'orientation

(5 pts)

- a) $S : -2 - 3 \times 1 + 5 = 0 \checkmark ; B : 4 - 3 \times 3 + 5 = 0 \checkmark$. Deux points distincts vérifient cette équation de droite, c'est donc une équation de (SB) . (1 pt) (1,25)
- b) On résout $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases}$: par soustraction, $-4y + 16 = 0$, donc $y = 4$ puis $x = 7 : P(7; 4)$.
 $\vec{SP}\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{SB}\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) : \frac{3}{2}\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, donc $\vec{SP} = \frac{3}{2}\vec{SB}$ (P est bien au-delà de B). (1,5 pt) (1,25)
- c) $SP = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9,487$ unités, soit environ 949 m. (1 pt) (1,25)
- d) $T \in \rho : T(x; 11 - x)$. $TS^2 = (x + 2)^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 104$ et $TB^2 = (x - 4)^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 80$. $TS = TB \iff -16x + 104 = -24x + 80 \iff 8x = -24 \iff x = -3$: $T(-3; 14)$. $TS = \sqrt{1^2 + (-13)^2} = \sqrt{170} \approx 13,04$ unités, soit environ 1 304 m (et $TB = \sqrt{49 + 121} = \sqrt{170} \checkmark$). (1,5 pt) (1,25)

Méthode — Pour trouver un point d'une droite, on le paramètre avec une seule inconnue grâce à l'équation de la droite, puis on traduit la condition imposée ; comparer des carrés de distances évite les racines.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).